به نام خدا

در این تمرین، منحنی های عملکردی مربوط به مثال سیگنال تصادفی گوسی سفید در نویز سفید گوسی ، با استفاده از شبیه سازی به دست می آید. در تمامی شبیه سازیهایی که در ادامه می آید، مقدار N را برابر 25 و مقدار σ^2)واریانس نویز(را برابر ۱ درنظر بگیرید.

We model the signal as a zero mean, white, WSS Gaussian random process with variance σ_s^2. Or we say $s[n]$ is WGN (although the term "noise" is actually a misnomer). We assume the noise $w[n]$ is WGN with variance σ^2 and is independent of the signal. The detection problem is to distinguish between the hypotheses

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: x[n] = w[n] \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \mathcal{H}_1 &: x[n] = s[n] + w[n] \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

فرم آماره آشکارسازی برای این مسأله به صورت زیر می باشد:

we decide $\mathcal{H}_1$ if

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] > \gamma'.$$

در این تمرین نیز هدف آنست که برای این آشکارسازی، منحنی های عملکرد تئوری با منحنی های به دست آمده از شبیه سازی مقایسه گردد. برای این منظور به صورت زیر عمل گردد:

۱. در ابتدا منحنی های کتاب با استفاده از روابط تئوری بازتولید گردد. این منحنی به صورت شکل زیر می باشد:

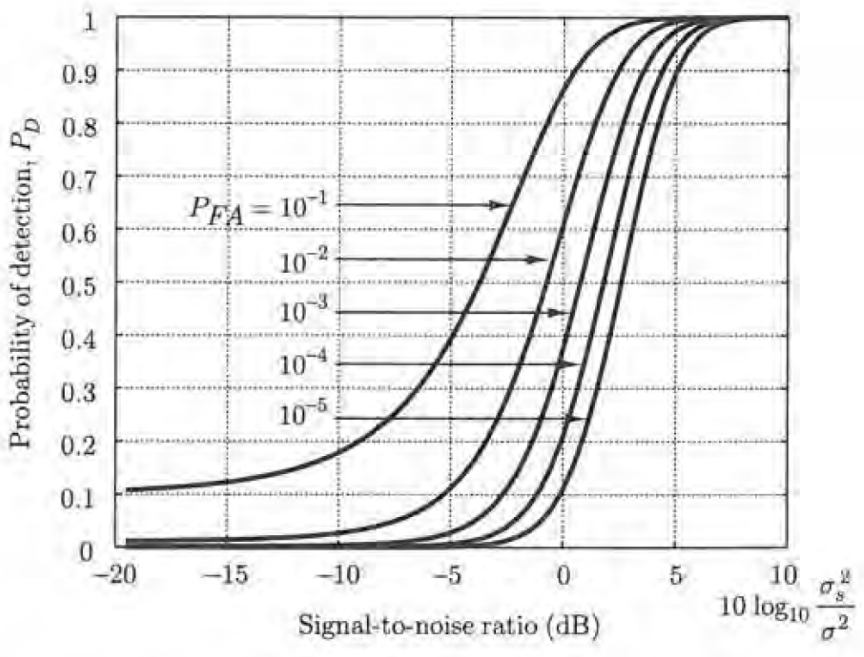

Figure 5.1. Energy detector performance ($N = 25$).

برای این منظور کافیست از رابطه زیر استفاده نمایید. مقدار احتمال هشدار کاذب را برابر مقدار 10^{-1} تا 10^{-5} درنظر گرفته و مقدار SNR را تغییر دهید.

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; \mathcal{H}_0\} \\ &= \Pr\left\{\frac{T(\mathbf{x})}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2}; \mathcal{H}_0\right\} \\ &= Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_D &= \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; \mathcal{H}_1\} \\ &= Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma_s^2 + \sigma^2}\right). \end{aligned}$$

۲. در این قسمت سعی داریم با استفاده از شبیه سازی، منحنی ها را در سه حالت احتمال هشدار کاذب 10^{-1}، 10^{-2} و 10^{-3} رسم نماییم. در ابتدا بایستی حد آستانه آشکارسازی را با استفاده از شبیه سازی به دست آوریم. مقدار آستانه آشکارسازی با استفاده از روابط تئوری به صورت زیر به دست آمده بود:

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma'; \mathcal{H}_0\} \\ &= \Pr\left\{\frac{T(\mathbf{x})}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2}; \mathcal{H}_0\right\} \\ &= Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

ولی ما در اینجا سعی داریم مقدار آن را با استفاده از شبیه سازی به دست آوریم. برای این منظور به تعداد M بار (مقدار M برابر $\frac{100}{P_{fa}}$ درنظر گرفته شود) مراحل زیر اجرا گردد:

- بردار نویز گوسی سفید به طول N با استفاده از دستور randn ساخته شود.
- آماره آشکارسازی T(x) با استفاده از رابطه زیر از عناصر این بردار ساخته شده و ذخیره شود:

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

پس از اجرای این عملیات، به تعداد M از آماره آشکارسازی در حالت نویز تنها در اختیار می باشد. این M مقدار را از کوچکتر به بزرگتر مرتب کرده و یکصدمین مقدار از بالا را به عنوان حد آستانه انتخاب نمایید. این مقدار را با مقدار به دست آمده از رابطه تئوری مقایسه کنید.

۳. پس از شبیه سازی و محاسبه حد آستانه، بردار x تحت فرضیه H_1 بایستی ساخته شده و احتمال آشکارسازی به دست آید. برای این منظور به تعداد زیاد مثلاً ۱۰۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰۰ بار، مراحل زیر انجام شود (این تعداد را K می نامیم):

- **<u>دو بردار</u>** زیر را به صورت مستقل بسازید و با هم جمع کنید:

  - بردار نویز گوسی سفید به طول N با میانگین صفر و واریانس یک (این بردار در واقع بردار نویز $w[n]$ می باشد).
  - بردار نویز گوسی سفید به طول N با میانگین صفر و واریانس σ_s^2 جمع کنید (این بردار در واقع بردار سیگنال $s[n]$ می باشد).

- آماره آشکارسازی T(x) با استفاده از رابطه زیر از عناصر این بردار ساخته شده و ذخیره شود:

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

پس از اجرای این عملیات، به تعداد K تا از آماره آشکارسازی در حالت نویز و سیگنال در اختیار می باشد. این مقادیر را با حد آستانه به دست آمده از شبیه سازی بخش قبل مقایسه کنید. فرض کنید در N_D بار از این K بار، مقدار آماره آشکارسازی از حد آستانه بیشتر باشد. در اینصورت مقدار احتمال آشکارسازی برای این حالت برابر $P_d = \frac{N_D}{K}$ می باشد.

۴. برای رسم منحنی Power Function کافیست پس از محاسبه حد آستانه، مقدار احتمال آشکارسازی را با استفاده از شبیه سازی و با فرض مقادیر مختلف برای σ_s^2 رسم نمایید. این نمودارها را با نمودارهای بخش ۱ یعنی نمودارهای حاصل از روابط تئوری در یک شکل رسم نموده و با هم مقایسه کنید.