Archive of SID

مقاله

مروری بر روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته در مکانیک محاسباتی

شاهرخ حسینی هاشمی، دانشیار دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران
کمیل خرمی، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران
komeil.khorami@gmail.com

چکیده

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته[1] به‌منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی به‌کار رفته، برای بهبود روش مربعات دیفرانسیلی[2] و نیز محاسبهٔ ضرایب وزنی ارائه شده است. در سال‌های اخیر این روش به‌دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران شاخه‌های گوناگون علوم قرار گرفته است. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری می‌باشد که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسئلهٔ خاصی مربوط نیست و تنها به نقاط شبکه و مرتبهٔ مشتق بستگی دارد. در این روش نقاط شبکه به‌صورت اختیاری و بدون هیچ محدودیتی انتخاب شده است.

واژه‌های کلیدی: روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQ)، ضرایب وزنی، توابع تست، نقاط شبکه

مقدمه

همراه با پیشرفت روبه رشد ماشین‌های محاسباتی، تحقیقاتی نیز برای توسعهٔ روش‌های جدید برای حل عددی مسائل در علوم مهندسی و فیزیک و فعالیت‌های موازی در حال انجام است، مثلاً مدل‌سازی بسیاری از سیستم‌های دینامیکی اغلب نیازمند یک روش حل عددی سریع برای مدل ریاضی سیستم معادلات است. مثال دیگر، کاربرد کامپیوتر در فرایند طراحی است که در آن بانک اطلاعاتی غالباً نیازمند نگه‌داری کامپیوترهای بزرگ است و همچنین احتمال اشتباه در ورود پارامترهای طراحی سبب کاهش دقت حل و افزایش زمان آن می‌شود. در چنین مواردی با رفع نیاز به پایگاه داده‌ها، حل سریع عددی معادلات سیستم، تجزیه و تحلیل دقیق و سریع‌تر را ممکن می‌کند. این مقاله به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته می‌پردازد که به‌تدریج به‌عنوان یک روش

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir

www.SID.ir

Archive of SID

حل عددی برای مسائل اولیه و مقدار مرزی[۳]، در علوم مهندسی و فیزیک مطرح شده است. کاربرد روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته در منابع موجود، در حوزهٔ مسائل زیستی، فرایندهای حمل‌ونقل، مکانیک سیالات، استاتیک و دینامیک سازه‌های مکانیکی است. همچنین ادعا می‌شود که این روش قابلیت به‌دست‌آوردن نتایج دقیق، با کمترین تلاش در محاسبات را داراست. به‌علت پتانسیل بالای روش مذکور، این روش می‌تواند جایگزین خوبی برای روش‌های تفاضل محدود و اجزاء محدود باشد.

نکتهٔ دیگر برای استفاده درست از این روش نحوهٔ انتخاب نقاط شبکه است. همچنین توزیع نقاط دقت نقش مهمی در تعیین دقت، سرعت همگرایی و پایداری روش ایفا می‌کند. این مقاله خلاصه‌ای از مفهوم و کاربرد روش مذکور و مفاهیم اساسی ریاضی آن است.

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

قاعده مربعات

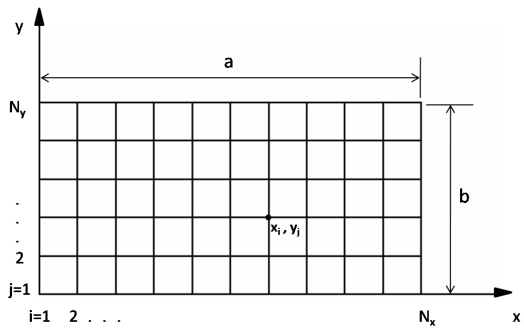
روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته براساس آنالیز تقریب چندجمله‌ای مرتبه بالا و همچنین تجزیه و تحلیل فضای برداری خطی استوار است. به‌منظور آشنایی با اساس ریاضی روش DQ تابع $\Psi = \Psi(x,y)$ در نظر گرفته می‌شود که حوزهٔ آن در یک دامنهٔ مستطیلی به‌صورت $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$ می‌باشد. فرض می‌شود که در این دامنه مقادیر تابع در شبکهٔ نقاط مشخص باشند. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، با قرار دادن N_x و N_y نقطه در راستای x و y، شبکهٔ نقاط به‌وجود می‌آیند. سپس مشتق جزئی نسبت به x و مرتبهٔ r از تابع $\Psi(x,y)$ در نقطهٔ $x=x_i$ و در راستای $y=y_j$ (هر خط موازی با محور x) به‌صورت ۱ نوشته می‌شود.

$$\left.\frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \Psi_{kj}\,; \quad i = 1,2,\cdots,N_x \qquad (۱)$$

همچنین مشتق جزئی نسبت به y و مرتبهٔ s از تابع $\Psi(x,y)$ در نقطهٔ $y=y_i$ و در راستای $x=x_j$ (هر خط موازی با محور y) به‌صورت ۲ می‌باشد.

$$\left.\frac{\partial^s \Psi}{\partial x^s}\right|_{y=y_i} = \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(s)} \Psi_{il}\,; \quad j = 1,2,\cdots,N_y \qquad (۲)$$

به‌طوری‌که $A_{ik}^{(r)}$ و $B_{jl}^{(s)}$ ضرایب وزنی است. همچنین $\Psi_{ij} = \Psi(x_i, y_j)$ می‌باشد.



شکل ۱. شبکه‌بندی در دامنهٔ مستطیلی

معادلات ۱ و ۲ قاعدهٔ مربعات را برای مشتق تابع در نقاط گسسته نشان می‌دهد و برای روش DQ بسیار اساسی است. برای اجرای روش DQ نخست باید ضرایب وزنی مشخص شوند. این کار با تقریب توابع در جهت مختصات مربوطه عملی می‌باشد. توابع تقریب به توابع تست معروفند. اگرچه برای انتخاب توابع تست گزینه‌های متفاوتی وجود دارد، اما رایج‌ترین آن انتخاب توابع تست چندجمله‌ای است. بنابراین تابع $\Psi(x,y)$ به این‌صورت نوشته می‌شود:

$$\Psi(x,y) = F(x)G(y) \qquad (۳)$$

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir
www.SID.ir

Archive of SID

به‌طوری‌که در این رابطه F(x) و G(x) توابع تست در جهت x و y می‌باشند و داریم:

$$F(x) = x^{\nu-1};\ \nu = 1,2,\ldots,N_x \qquad (۴)$$

و

$$G(y) = y^{\mu-1};\ \mu = 1,2,\ldots,N_y \qquad (۵)$$

با جایگذاری معادلات ۳ تا ۵ در معادلهٔ ۱ و۲، سیستم معادلات وندرموند[۴] به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{N_x}(x_k^{\nu-1})A_{ik}^{(r)} = \left.\frac{\partial^r}{(\partial x^r)(x^{\nu-1})}\right|_{x=x_i}$$

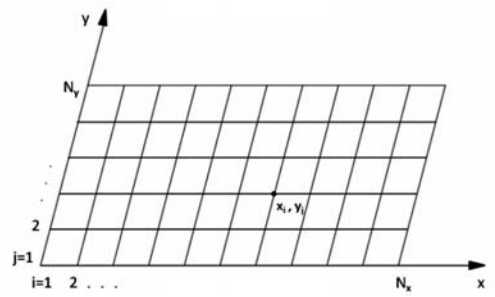
$$i,\nu = 1,2,\ldots,N_x \qquad (۶)$$

و

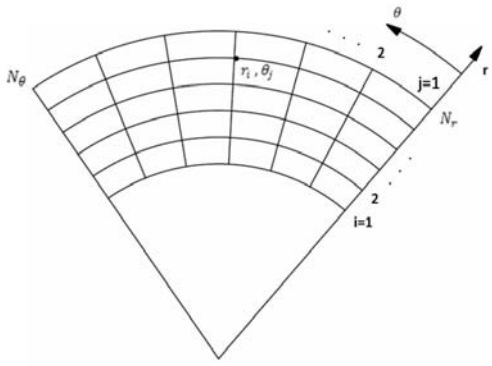
$$\sum_{l=1}^{N_y}(y_l^{\mu-1})B_{jl}^{(s)} = \left.\frac{\partial^s}{(\partial y^s)(y^{\mu-1})}\right|_{y=y_j}$$

$$j,\mu = 1,2,\ldots,N_y \qquad (۷)$$

کاملاً واضح است که برای توابع تست به این شکل، معادلات ۴ و ۵، برای هر مشتقی که مرتبهٔ آن بزرگتر یا مساوی تعداد نقاط شبکه باشد، ضرایب وزنی صفر می‌باشند. از عبارات مذکور مشخص است که ضرایب وزنی $A_{ik}^{(r)}$، تنها به نقاط شبکه $x_i;\ i = 1,2,\ldots,N_x$ در بازهٔ $0 \le x \le a$ بستگی دارد. نکتهٔ قابل توجه این است که این معادلات تنها برای دستگاه کارتزین قابل استفاده نیستند، مثلاً می‌توان ضرایب وزنی را برای مشتق نسبت به مختصات اریب برای استفاده در یک دامنهٔ متوازی‌الاضلاع نیز به‌کار برد (شکل ۲)، همچنین برای مشتق نسبت به مختصات قطبی که در یک حوزهٔ قطاعی می‌باشد نیز قابل استفاده است. (شکل ۳)



شکل ۲. شبکه‌بندی در دامنهٔ متوازی‌الاضلاع



شکل ۳. شبکه‌بندی در دامنهٔ قطاعی، مدور و متحدالمرکز

با توجه به قانون مربعات می‌توان معادلهٔ ۱ را به فرم ماتریسی ۸ بازنویسی کرد.

$$\left\{\Psi_x^{(r)}\right\}_j = \left[A^{(r)}\right]\left\{\Psi\right\}_j \qquad (۸)$$

به‌طوری‌که $\left\{\Psi\right\}_j$ و $\left\{\Psi_x^{(r)}\right\}_j$ به‌ترتیب بردار ستونی مقادیر N_x مربوط به هر تابع و مشتق مرتبهٔ r آن می‌باشند، و برای نقاط شبکهٔ واقع بر خط $y=y_j$ به‌کار می‌رود. همچنین $\left[A^{(r)}\right]$ ماتریس $N_x \times N_x$ ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه r می‌باشد. همچنین با توجه به تعریف عملگر دیفرانسیل:

$$\frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{(r-1)}\Psi}{\partial x^{(r-1)}}\right) = \frac{\partial^{(r-1)}}{\partial x^{(r-1)}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

می‌توان معادلهٔ ۱ را به فرم زیر نوشت:

$$\left.\frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(1)} \sum_{m=1}^{N_x} A_{km}^{(r-1)} \Psi_{mj} =$$

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir
www.SID.ir

Archive of SID

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r-1)} \sum_{m=1}^{N_x} A_{km}^{(1)} \Psi_{mj} \qquad (۹)$$

از معادلات ۸ و ۹ به آسانی می‌توان روابط بازگشتی زیر را برای ضرایب وزنی به‌دست آورد.

$$\left[A^{(r)}\right] = \left[A^{(1)}\right]\left[A^{(r-1)}\right] = \left[A^{(r-1)}\right]\left[A^{(1)}\right] \qquad (۱۰)$$

با توجه به معادلهٔ ۱۰ مشخص است که با داشتن ماتریس $\left[A^{(1)}\right]$ مربوط به ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ اول، می‌توان ضرایب وزنی مشتقات مرتبه بالا را با ضرب متوالی ماتریس $\left[A^{(1)}\right]$ در خودش محاسبه کرد. معادلات ۸ تا ۱۰ مربوط به مشتقات نسبت به x بودند، برای محاسبهٔ روابط مربوط به مشتقات نسبت به y روشی مشابه با آنچه گفته شد، صورت می‌پذیرد.

در مفهوم کلی، بحث مربعات به تقریب انتگرال یک تابع توسط مجموع وزنی خطی مقادیر تابع در تعدادی از نقاط شبکه در بازهٔ انتگرال بازمی‌گردد. نکتهٔ قابل توجه این است که قانون مربعات برای مشتقات توابع، در واقع به‌صورت یک بسط مشابه با انتگرال مربعات توسط بلمن و کاستی[۵] [۵] در سال ۱۹۷۱ م معرفی شده بود. انتگرال نسبت به متغیر x برای تابع $\Psi(x,y)$ روی هر خط $y=y_j$ به این‌صورت است:

$$\int_{x=0}^{a} \Psi(x, y_j)dx = \sum_{k=1}^{N_x} C_k \Psi_{kj} \qquad (۱۱)$$

و همچنین انتگرال نسبت به متغیر y روی خطوط $x=x_i$

$$\int_{y=0}^{b} \Psi(x_i, y)dx = \sum_{l=1}^{N_y} D_l \Psi_{il} \qquad (۱۲)$$

معادلات ۱۱ و ۱۲ قواعد انتگرال مربعات هستند که C_k و D_l به‌ترتیب ضرایب وزنی انتگرال در راستای x و y می‌باشند. با استفاده از معادلهٔ ۳ الی ۵ در معادلهٔ ۱۱ و ۱۲ می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{Nx} \left(x_k^{\nu-1}\right) C_k = \frac{a^\nu}{\nu};\ \nu = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۱۳)$$

و

$$\sum_{l=1}^{N_y} \left(y_l^{\mu-1}\right) D_l = \frac{b^\mu}{\mu};\ \mu = 1, 2, \ldots, N_y \qquad (۱۴)$$

قواعد مربعات که در معادلات ۱، ۲، ۱۳ و ۱۴، همچنین ممکن است برای ترکیب‌های خطی از مشتق و انتگرال توابع نیز مورد استفاده قرار گیرد، اما فقط نسبت به یک متغیر مستقل انجام می‌شود. در واقع ممکن است یک قاعدهٔ مربعات به شکل معادلات ۱ و ۲ نباشد، مثلاً در حالتی که مشتق جزئی ترکیبی از نوع $\frac{\partial^{(r+s)}\Psi}{\partial x^r \partial y^s}$ باشد. در هر صورت با تعریف عملگرهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرم مذکور را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\left.\frac{\partial^{(r+s)}\Psi}{\partial x^r \partial y^s}\right|_{x_i, y_j} = \left.\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial^s \Psi}{\partial y^s}\right)\right|_{x_i, y_j} =$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(s)} \Psi_{kl} \qquad (۱۵)$$

و همچنین برای انتگرال ترکیبی

$$\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \Psi(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{N_x} C_k \sum_{l=1}^{N_y} D_l \Psi_{kl} \qquad (۱۶)$$

با استفاده از قاعدهٔ مربعات برای مشتقات با مراتب متفاوت، ممکن است برای یک معادلهٔ دیفرانسیل در بازهٔ حل، روش مربعات در نقاط شبکه نوشته شود، و مجموعه‌ای از معادلات جبری مرتبه اول برحسب مقادیر تابع در نقاط شبکه به‌دست می‌آید. همچنین ممکن است معادلات مربعات مربوط به شرایط مرزی تشکیل شود[۶].

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir
www.SID.ir

Archive of SID

ضرایب وزنی و نقاط شبکه

دو فاکتور بسیار مهم در دقت حل روش DQ وجود دارد: نخست ضرایب وزنی و دیگری انتخاب نقاط شبکه. می‌توان با حل سیستم معادلات وندرموند مانند معادلات ۶، ۷، ۱۳ و ۱۴ ضرایب وزنی را به‌دست آورد. هرچند که ماتریس‌های وندرموند ذاتاً به شرایط ایل[۶] شناخته می‌شوند، در حقیقت تجربه ثابت می‌کند ضرایب وزنی که با حل مستقیم معادلات وندرموند به‌دست می‌آیند، با افزایش تعداد نقاط شبکه با خطای بیشتری مواجه می‌شوند. ضرایب وزنی به‌دست‌آمده از روش تحلیلی همینگ[۷] (۱۹۷۳) [۷] دارای دقت بیشتری می‌باشند. ضرایب وزنی ممکن است صرف‌نظر از تعداد و محل نقاط شبکه، به‌صورت مستقیم و با دقتی خوب، با استفاده از فرمول صریح (کوان و چانگ[۸]، ۱۹۸۹[۸] و [۹]؛ شو و ریچارد[۹]، ۱۹۹۲[۱۰] و [۱۱]) محاسبه شوند. به‌سبب دقت بالا و مفیدبودن فرمول شو و ریچارد، در این بخش این فرمول نسبت به متغیر x ارائه شده است و برای متغیر y روشی مشابه با متغیر x بایستی انجام شود. درایه‌های غیرقطری ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه اول به این‌صورت بیان می‌شوند:

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k)\Pi(x_k)};$$

$$i,k = 1,2,\ldots,N_x,\ k \neq i \qquad (۱۷)$$

به‌طوری‌که

$$\Pi(x_i) = \prod_{\nu=1,\nu\neq i}^{N_x}(x_i - x_\nu),$$

$$\Pi(x_k) = \prod_{\nu=1,\nu\neq k}^{N_x}(x_k - x_\nu) \qquad (۱۸)$$

درایه‌های غیرقطری ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبهٔ دوم و بالاتر نیز با استفاده از رابطهٔ بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{ik}^{(r)} = r\left[A_{ii}^{(r-1)}A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k}\right]$$

$$i,k = 1,2,\ldots,N_x,\ k \neq i \qquad (۱۹)$$

که در آن $2 \le r \le (N_x - 1)$ می‌باشد. درایه‌های قطری ماتریس ضرایب وزنی به فرم زیر نوشته می‌شوند:

$$A_{ii}^{(r)} = -\prod_{\nu=1,\nu\neq i}^{N_x} A_{i\nu}^{(r)};\ i = 1,2,\ldots,N_x \qquad (۲۰)$$

به‌طوری‌که $1 \le r \le (N_x - 1)$ است. باید توجه شود که با داشتن ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ اول (با استفاده از معادلات ۱۷ و ۲۰)، می‌توان ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ دوم و بالاتر را از طریق رابطهٔ بازگشتی ۱۰ به‌دست آورد. در هر صورت محاسبهٔ ضریب وزنی با این رابطه، شامل N_x ضرب و (N_x-1) جمع می‌باشد که در مجموع $(2N_x-1)$ عملیات محاسباتی بایستی انجام شود. از طرف دیگر رابطهٔ بازگشتی ۱۹ شامل دو ضرب، یک تقسیم و یک تفریق می‌باشد؛ یعنی در مجموع ۴ عملیات محاسباتی برای محاسبهٔ هر ضریب وزنی غیرقطری لازم است که این تعداد عملیات مستقل از N_x می‌باشد. همچنین محاسبهٔ ضرایب وزنی قطری از معادلهٔ ۲۰ شامل (N_x-2) تفریق است. بنابراین مجموع عملیات محاسباتی در معادلات ۱۹ و ۲۰ بسیار کمتر از معادلهٔ ۱۰ می‌باشد. در نتیجه با افزایش تعداد نقاط شبکه، و به‌علت کاهش خطای گردکردن در معادلات ۱۹ و ۲۰، این معادلات نسبت به معادلهٔ ۱۰ از دقت بیشتری برخوردار می‌باشند.

راحت‌ترین روش برای انتخاب نقاط دقت در دامنهٔ محاسباتی، انتخاب نقاط دقت با فاصلهٔ برابر در راستای مختصات دامنهٔ محاسباتی است که به‌صورت روابط ۲۱ و ۲۲ هستند.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1}a;\ i = 1,2,\ldots,N_x \qquad (۲۱)$$

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir
www.SID.ir

Archive of SID

و

$$y_i = \frac{i-1}{N_y - 1} b;\ i = 1, 2, \ldots, N_y \qquad (۲۲)$$

و به‌ترتیب در راستای x و y می‌باشند. با این‌حال نشان داده شده است که توزیع غیریکنواخت نقاط دقت نتایج بهتری را نسبت به نقاط دقت با فاصلهٔ مساوی می‌دهد. اگرچه چنین نقاطی ممکن است به‌صورت آزمایشی انتخاب شوند، اما اساس منطقی نقاط شبکه، از صفرهای چندجمله‌ای‌های متعامد نتیجه می‌شود. مثلاً یکی از روش‌های به‌دست‌آوردن نقاط شبکه به‌صورت معادلات ۲۳ و ۲۴ است.

$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N_x - 1}\right)}{2} a; i = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۲۳)$$

$$y_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N_y - 1}\right)}{2} b; i = 1, 2, \ldots, N_y \qquad (۲۴)$$

لازم به‌ذکر است که در حل مربعات ممکن است تعداد نقاط شبکه در جهت‌های مختصاتی گوناگون با هم متفاوت باشد. در حقیقت ممکن است در جهات مختصاتی گوناگون از توابع تست متفاوت استفاده شود. در ادامه توزیع نقاط دقت برای چندین حالت بررسی شده است. انواع توزیع نقاط دقت که در اغلب مقالات استفاده می‌شود، به این‌صورت می‌باشند[۶]:

نقاط دقت با فواصل مساوی (یا توزیع یکنواخت):

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1};\ i = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۲۵)$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع اول

$$x_i = \frac{g_i - g_1}{g_{N_x} - g_1},\ g_i = \cos\left(\left(\frac{2i-1}{2N_x}\right)\pi\right)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۲۶)$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم

$$x_i = \frac{g_i - g_1}{g_{N_x} - g_1},\ g_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N_x + 1}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۲۷)$$

ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر

$$x_i = \frac{g_i - g_1}{g_{N_x} - g_1},$$

$$g_i = \left(1 - \frac{1}{8N_x^2} + \frac{1}{8N_x^3}\right)\cos\left(\frac{4i-1}{4N_x + 2}\pi\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۲۸)$$

توزیع نقاط نمونهٔ درجه دوم[۱۰]

$$x_i = \begin{cases} 2\left(\frac{i-1}{N-1}\right)^2, \\ i = 1, 2, \ldots, \frac{N_x + 1}{2} \\ \left(-2\left(\frac{i-1}{N-1}\right)^2 + 4\left(\frac{i-1}{N-1}\right) - 1\right), \\ i = \left(\frac{N_x + 1}{2}\right) + 1, \ldots, N_x \end{cases} \qquad (۲۹)$$

نقاط نمونهٔ چبیشف – گوس – لوباتو

$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N_x - 1}\right)\pi}{2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N_x \qquad (۳۰)$$

نتیجه‌گیری

گفتیم که طی سالیان گذشته این روش به‌دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران در زمینه‌های گوناگون قرار گرفته است. این مقاله به روش GDQ پرداخته است که به‌تدریج به‌عنوان یک روش حل عددی برای مسائل اولیه و مقدار مرزی[۱۱]، در علوم مهندسی و فیزیک مطرح شده است.

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir
www.SID.ir

Archive of SID

کاربرد روش GDQ در منابع موجود، در حوزهٔ مسائل زیستی، فرایندهای حمل‌ونقل، مکانیک سیالات، استاتیک و دینامیک سازه‌های مکانیکی است. همچنین ادعا می‌شود که روش GDQ قابلیت به‌دست‌آوردن نتایج دقیق، با کمترین تلاش در محاسبات، را داراست. در این مقاله، نخست قاعدهٔ مربعات در دامنه‌های گوناگون در دو راستا شرح و نشان داده شد که برای اجرای روش GDQ باید ضرایب وزنی تعیین شوند. به‌همین منظور توابع تست معرفی شدند. روابط مربوط به توابع تست چندجمله‌ای نوشته و سیستم معادلات وندرموند مربوط به آن مشخص شد و برای هر مشتقی که مرتبهٔ آن بزرگتر یا مساوی تعداد نقاط شبکه بود، ضرایب وزنی صفر بودند. همچنین مشخص شد که برای به‌دست‌آوردن ضرایب وزنی مراتب بالا می‌توان از ماتریس ضرایب وزنی مرتبهٔ اول و روابط بازگشتی ذکرشده استفاده کرد. علاوه بر این از تأثیر بسیار مهم ضرایب وزنی و نقاط شبکه در دقت و سرعت نتایج روش GDQ بحث شد و یکی از روش‌های رایج و مهم به‌دست‌آوردن ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبهٔ اول، و با استفاده از روابط بازگشتی برای مراتب بالاتر، توضیح داده شد. نکتهٔ دیگر برای استفاده درست از روش GDQ نحوهٔ انتخاب نقاط شبکه است. همچنین توزیع نقاط دقت نقش مهمی در تعیین دقت، سرعت همگرایی و پایداری روش GDQ، ایفا می‌کند. نحوهٔ محاسبهٔ ضرایب وزنی با استفاده از معادلهٔ ۱۰ و نیز معادلات ۱۹ و ۲۰ شرح داده و تأثیر، سرعت و دقت روش دوم بررسی شد.

مراجع

[1] C. Shu, Generalized, *Differential-integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation*, PhD Thesis, University of Glasgow, 1991.

[2] Bellman, R. E., *Methods of Nonlinear Analysis*, Academic Press, New York, 1973.

[3] Bellman, R and Adomian, G., *Partial differential equations*, D Reidel, Netherlands, 1985.

[4] Bellman, R and Roth, R. S., *Methods in approximation*, D Reidel, Netherlands, 1986.

[5] Bellman, R. E. and Casti, J., "Differential quadrature and long-term integration". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, pp. 235-238.

[6] Bert, C. W. and Malik, M., "Differential quadrature method in computational mechanics: A review", Appl. Mech. Rev. 49, 1996, pp. 1-28.

[7] Hamming, R. W., *Numerical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[8] Quan, J. R.; Chang, C. T., "New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods - I", Comput. Chem. Engrg., 13, 1989, pp. 779-788.

[9] Quan, J. R.; Chang, C. T., "New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods - II", Comput. Chem. Engrg., 1989, 1017-1024.

[10] C. Shu and B. E., Richards, "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes equations', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, 1992, pp. 791-798.

[11] C. Shu and B. E., Richards, "Parallel Simulation of Incompressible Viscous Flows by Generalized Differential Quadrature', *Computing Systems in Engineering*, Vol. 3, 1992, pp. 271-281.

پی‌نوشت

1. GDQ
2. DQ
3. Initial & Boundary-value Problem
4. Vandermonde
5. Casti
6. ill-conditioned
7. Hamming
8. Quan & Chang
9. Richard
10. Quadratic
11. Initial & Boundary-value Problem

★ ★ ★

Email: mech_mag@yahoo.com
Website: www.isme.ir

www.SID.ir