شاهرخ حسینی هاشمی، دانشیار دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران کمیل خرمی، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران komeil.khorami@gmail.com

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیمیافته <sup>(</sup> بهمنظور گسستهسازی معادلات حاکم و شرایط مرزی به کار رفته، برای بهبود روش مربعات دیفرانسیلی<sup>۲</sup> و نیز محاسبهٔ ضرایب وزنی ارائه شده است. در سالهای اخیر این روش به دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران شاخههای گوناگون علوم قرار گرفته است. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری می باشد که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسئلهٔ خاصی مربوط نیست و تنها به نقاط شبکه و مرتبهٔ مشتق بستگی دارد. در این روش نقاط شبکه به صورت اختیاری و بدون هیچ محدودیتی انتخاب شده است.

واژههای کلیدی: روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQ)، ضرایب وزنی، توابع تست، نقاط شبکه

فرایند طراحی است که در آن بانک اطلاعاتی غالباً نیازمند نگهداری کامپیوترهای بزرگ است و همچنین احتمال اشتباه در ورود پارامترهای طراحی سبب کاهش دقت حل و افزایش زمان آن می شود. در چنین مواردی با رفع نیاز به پایگاه دادهها، حل سریع عددی معادلات سیستم، تجزیه و تحلیل دقیق و سریع تر را ممکن می کند. این مقاله به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیمیافته می پردازد که به تدریج به عنوان یک روش

همراه با پیشرفت روبه رشد ماشین های محاسباتی، تحقیقاتی نیز برای توسعهٔ روش های جدید برای حل عددی مسائل در علوم مهندسی و فیزیک و فعالیت های موازی در حال انجام است، مثلاً مدل سازی بسیاری از سیستم های دینامیکی اغلب نیازمند یک روش حل عددی سریع برای مدل ریاضی سیستم معادلات است. مثال دیگر، کاربرد کامپیوتر در مفندسی مکانیک / شماره ۵۷ / سال بیستم ۲۹۴۱.....

f:

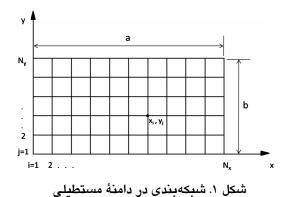
مقدمه

چکندہ

در راستای  $y=y_i$  (هر خط موازی با محور x) به صورت ۱ نوشته می شود.  $\left. \frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \Psi_{kj}; \quad i=1,2,\cdots,N_x \quad (1)$ همچنین مشتق جزئی نسبت به y و مرتبهٔ s از تابع همچنین مشتق جزئی نسبت به y و مرتبهٔ s از تابع  $y=y_i$  (هر خط موازی با محور y) به صورت ۲ می باشد.

$$\frac{\partial^{s} \Psi}{\partial x^{s}} \bigg|_{y=y_{i}} = \sum_{l=1}^{N_{y}} B_{jl}^{(s)} \Psi_{il}; \quad j = 1, 2, \cdots, N_{y}$$
(Y)

بهطوریکه  $A_{ik}^{(r)}$  و  $B_{jl}^{(s)}$  ضرایب وزنی است. همچنین  $A_{ik}^{(r)} = \Psi(x_i, y_j)$  میباشد.



معادلات ۱ و ۲ قاعدهٔ مربعات را برای مشتق تابع در نقاط گسسته نشان میدهد و برای روش DQ بسیار اساسی است. برای اجرای روش DQ نخست باید ضرایب وزنی مشخص شوند. این کار با تقریب توابع در جهت مختصات مربوطه عملی میباشد. توابع تقریب به توابع تست معروفند. اگرچه برای انتخاب توابع تست گزینههای متفاوتی وجود دارد، اما رایجترین آن انتخاب توابع تست چندجملهای است. بنابراین تابع ( $\Psi(x,y) = F(x)G(y)$  (۳) حل عددی برای مسائل اولیه و مقدار مرزی"، در علوم مهندسی و فیزیک مطرح شده است. کاربرد روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته در منابع موجود، در حوزهٔ مسائل زیستی، فرایندهای حمل ونقل، مکانیک سیالات، استاتیک و دینامیک سازههای مکانیکی است. همچنین ادعا میشود که این روش قابلیت بهدست آوردن نتایج دقیق، با کمترین تلاش در محاسبات را داراست. بەعلـت پتانسـيل بـالاي روش مذکور، این روش می تواند جایگزین خوبی برای روش های تفاضل محدود و اجزاء محدود باشد. نکتهٔ دیگر برای استفاده درست از این روش نحوهٔ انتخاب نقاط شبكه است. همچنين توزيع نقاط دقت نقـش مهمـی در تعیـین دقـت، سـرعت همگرایـی و پایداری روش ایفا می کند. این مقاله خلاصهای از مفهوم و کاربرد روش مذکور و مفاهیم اساسی ریاضی آن است.

## روش مربعات دیفرانسیلی تعمیمیافته قاعده مربعات

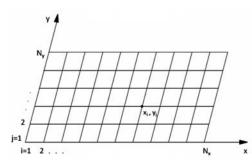
روش مربعات ديفرانسيلی تعميميافته براساس آناليز تقريب چندجملهای مرتبه بالا و همچنين تجزيه و تحليل فضای برداری خطی استوار است. به منظور آشایی با اساس رياضی روش DQ تابع آشایی با اساس رياضی روش Qd تابع (y, y)  $\Psi = \Psi(x, y)$ یک دامنهٔ مستطیلی به صورت  $a \ge x \ge 0$  و  $d \ge y \ge 0$ میباشد. فرض می شود که در اين دامنه مقادير تابع در شبکهٔ نقاط مشخص باشند. همان طور که در شکل ۱ مشاهده می شود، با قرار دادن  $x_{x}$  و y نقطه در راستای مشاهده می شود، با قرار دادن  $x_{x}$  و y نقطه در راستای مشاهده می شود، با قرار دادن  $x_{x}$  و y نقطه در راستای مشاهده می شود، با قرار دادن  $x_{x}$  و y در نقطهٔ در راستای نسبت به x و مرتبهٔ r از تابع  $\Psi(x, y)$  در نقطهٔ  $x=x_{x}$ 

Email: mech\_mag@yahoo.com Website: www.isme.ir

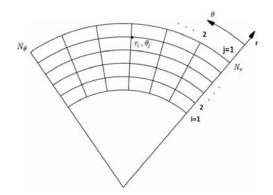
⊕

مھندسی مکانیک / شمارہ ۵۷ / سال بیستم

İ



شكل ۲. شبكهبندى در دامنهٔ متوازى الاضلاع



شكل ۳. شبكهبندى در دامنهٔ قطاعى، مدور و متحدالمركز

با توجه به قانون مربعات می توان معادلهٔ ۱ را به فرم ماتریسی ۸ بازنویسی کرد.

$$\left\{\Psi_{x}^{(r)}\right\}_{j} = \left[A^{(r)}\right]\left\{\Psi\right\}_{j} \tag{A}$$

بهطوریکه  ${}_{i}\{\Psi\}$  و  ${}_{i}\{\Psi_{x}^{(r)}\}$  بهترتیب بردار ستونی مقادیر N<sub>x</sub> مربوط به هر تابع و مشتق مرتبهٔ r آن میباشند، و برای نقاط شبکهٔ واقع بر خط y=y بهکار میرود. همچنین  $[A^{(r)}]$  ماتریس N<sub>x</sub>×N<sub>x</sub> ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه r میباشد. همچنین با توجه به تعریف عملگر دیفرانسیل:

$$\frac{\partial^{r}\Psi}{\partial x^{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{(r-1)}\Psi}{\partial x^{(r-1)}} \right) = \frac{\partial^{(r-1)}}{\partial x^{(r-1)}} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right)$$
  
*no* relied to a solution of the second seco

$$\frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r} \bigg|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(1)} \sum_{m=1}^{N_x} A_{km}^{(r-1)} \Psi_{mj} =$$

$$x) = x^{\nu - 1}; \nu = 1, 2, \dots, N_x$$
 (\*)

$$G(y) = y^{\mu - 1}; \ \mu = 1, 2, \dots, N_y$$
 ( $\Delta$ )

با جایگذاری معادلات ۳ تا ۵ در معادلهٔ ۱ و۲، سیستم معادلات وندرموند<sup>۴</sup> بهدست میآید:

$$\sum_{k=1}^{N_x} (x_k^{\nu-1}) A_{ik}^{(r)} = \frac{\partial^r}{(\partial x^r)(x^{\nu-1})} \bigg|_{x=x_i}$$
  
*i*,  $\nu = 1, 2, ..., N_x$ 

(۶)

9

⊕

مھندسی مکانیک / شمارہ ۵۷ / سال بیستم

İ

۶۸

$$\sum_{l=1}^{N_{y}} (y_{l}^{\mu-1}) B_{jl}^{(s)} = \frac{\partial^{s}}{(\partial y^{s})(y^{\mu-1})} \bigg|_{y=y_{j}}$$
  
$$j, \mu = 1, 2, \dots, N_{y}$$
(V)

کاملاً واضح است که برای توابع تست به این شکل، معادلات ۴ و ۵، برای هر مشتقی که مرتبهٔ آن بزرگتر یا مساوی تعداد نقاط شبکه باشد، ضرایب وزنی صفر میباشند. از عبارات مذکور مشخص است که ضرایب وزنی  $A_{ik}^{(r)}$ ، تنها به نقاط شبکه ضرایب وزنی  $x_i; i = 1, 2, ..., N_x$ نکتهٔ قابل توجه این است که این معادلات تنها برای نکتهٔ قابل توجه این است که این معادلات تنها برای دستگاه کارتزین قابل استفاده نیستند، مثلاً می توان ضرایب وزنی را برای مشتق نسبت به مختصات اریب برای استفاده در یک دامنهٔ متوازیالاضلاع نیز به کار برد (شکل ۲)، همچنین برای مشتق نسبت به مختصات قطبی که در یک حوزهٔ قطاعی میباشد نیز قابل استفاده است. (شکل ۳)

$$\sum_{k=1}^{N_x} \left( x_k^{\nu-1} \right) C_k = \frac{a^{\nu}}{\nu}; \, \nu = 1, 2, \dots, N_x \tag{117}$$

و

$$\sum_{l=1}^{N_{y}} \left( y_{l}^{\mu-1} \right) D_{l} = \frac{b^{\mu}}{\mu}; \ \mu = 1, 2, \dots, N_{y}$$
(14)

قواعد مربعات که در معادلات ۱، ۲، ۱۳ و ۱۴، همچنین ممکن است برای ترکیبهای خطی از مشتق و انتگرال توابع نیز مورد استفاده قرار گیرد، اما فقط نسبت به یک متغیر مستقل انجام می شود. در واقع ممکن است یک قاعدهٔ مربعات به شکل معادلات ۱ و ۲ نباشد، مثلاً در حالتی که مشتق جزئی معادلات ۱ و ۲ نباشد، مثلاً در حالتی که مشتق جزئی ترکیبی از نوع  $\frac{\Psi^{(r+s)}}{\partial x^r \partial y^s}$  باشد. در هر صورت با تعریف عملگرهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرم مذکور را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial^{(r+s)}\Psi}{\partial x^{r}\partial y^{s}}\bigg|_{x_{i}, y_{j}} = \frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}} \left(\frac{\partial^{s}\Psi}{\partial y^{s}}\right)\bigg|_{x_{i}, y_{j}} = \sum_{k=1}^{N_{x}} A_{ik}^{(r)} \sum_{l=1}^{N_{y}} B_{jl}^{(s)} \Psi_{kl}$$
(10)

و همچنین برای انتگرال ترکیبی

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \Psi(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^{N_{x}} C_{k} \sum_{l=1}^{N_{y}} D_{l} \Psi_{kl} \quad (18)$$
Here, we have the set of th

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r-1)} \sum_{m=1}^{N_x} A_{km}^{(1)} \Psi_{mj}$$
(9)

از معادلات ۸ و ۹ به آسانی میتوان روابط بازگشتی زیر را برای ضرایب وزنی بهدست آورد.

$$\left[ A^{(r)} \right] = \left[ A^{(1)} \right] \left[ A^{(r-1)} \right] = \left[ A^{(r-1)} \right] \left[ A^{(1)} \right]$$
 (1.)

با توجه به معادلهٔ ۱۰ مشخص است که با داشتن ماتریس [A<sup>(1)</sup>] مربوط به ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ اول، می توان ضرایب وزنی مشتقات مرتبه بالا را با ضرب متوالی ماتریس [A<sup>(1)</sup>] در خودش محاسبه کرد. معادلات ۸ تا ۱۰ مربوط به مشتقات نسبت به x بودند، برای محاسبهٔ روابط مربوط به مشتقات نسبت به y روشی مشابه با آنچه گفته شد، صورت می پذیرد. تابع توسط مجموع وزنی خطی مقادیر تابع در تعدادی از نقاط شبکه در بازهٔ انتگرال بازمی گردد. نکتهٔ قابل توجه این است که قانون مربعات برای مشتقات توابع، در واقع به صورت یک بسط مشابه با انتگرال مربعات شده بود. انتگرال نسبت به معرفی شده بود. انتگرال نسبت به معنیر x برای تابع (x, y)

$$\int_{x=0}^{a} \Psi(x, y_{j}) dx = \sum_{k=1}^{N_{x}} C_{k} \Psi_{kj}$$
(11)

و همچنین انتگرال نسبت به متغیر y روی خطوط x=xi

$$\int_{y=0}^{b} \Psi(x_{i}, y) dx = \sum_{l=1}^{N_{y}} D_{l} \Psi_{il}$$
(17)

معادلات ۱۱ و ۱۲ قواعد انتگرال مربعات هستند که C<sub>k</sub> معادلات ۱۱ و y و D<sub>l</sub> بهترتیب ضرایب وزنی انتگرال در راستای x و y میباشند. با استفاده از معادلهٔ ۳ الی ۵ در معادلهٔ ۱۱ و ۱۲ می توان نوشت:

Email: mech\_mag@yahoo.com \_\_\_\_\_Website: www.isme.ir

œ

مهندسی مکانیک / شماره ۲۷ / سال بیستم ۲۹۰

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[ A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right]$$
  
$$i, k = 1, 2, \dots, N_x, k \neq i$$
(19)

که در آن  $(N_x - 1) \ge r \ge 2$  می باشد. در ایه های قطری ماتریس ضرایب وزنی به فرم زیر نوشته می شوند:

$$A_{ii}^{(r)} = -\prod_{\nu=1, \nu\neq i}^{N_x} A_{i\nu}^{(r)}; \ i = 1, 2, \dots, N_x$$
(Y•)

به طوری که  $(N_x - 1) \le r \le 1$  است. باید توجه شود که با داشتن ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ اول (با استفاده از معادلات ۱۷ و ۲۰)، می توان ضرایب وزنبی مشتق مرتبهٔ دوم و بالاتر را از طریق رابطهٔ بازگشتی ۱۰ بهدست آورد. در هر صورت محاسبهٔ ضریب وزنی با این رابطه، شامل  $(2N_x - e_x - N_x)$  ضرب و  $(N_x - 1)$  جمع می باشد که در مجموع  $N_x$ (1 عملیات محاسباتی بایستی انجام شود. از طرف دیگر رابطهٔ بازگشتی ۱۹ شامل دو ضرب، یک تقسیم و یک تفريق مي باشد؛ يعنى در مجموع ۴ عمليات محاسباتي برای محاسبهٔ هر ضریب وزنی غیرقطری لازم است که این تعداد عملیات مستقل از N<sub>x</sub> میباشد. همچنین محاسبهٔ ضرایب وزنی قطری از معادلـهٔ ۲۰ شـامل (N<sub>x</sub>-2) تفريـق اسـت. بنـابراين مجمـوع عمليـات محاسـباتي در معادلات ۱۹ و ۲۰ بسیار کمتر از معادلهٔ ۱۰ می باشد. در نتیجه با افزایش تعداد نقاط شبکه، و بهعلت کاهش خطای گردکردن در معادلات ۱۹ و ۲۰، این معادلات نسبت به معادلهٔ ۱۰ از دقت بیشتری برخوردار میباشند.

راحتترین روش برای انتخاب نقاط دقت در دامنهٔ محاسباتی، انتخاب نقاط دقت با فاصلهٔ برابر در راستای مختصات دامنهٔ محاسباتی است که بهصورت روابط ۲۱ و ۲۲ هستند.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1}a; \ i = 1, 2, \dots, N_x \tag{(1)}$$

## ضرایب وزنی و نقاط شبکه

دو فاکتور بسیار مهم در دقـت حـل روش DQ وجـود دارد: نخست ضرايب وزني و ديگري انتخاب نقاط شبكه. مي توان با حل سيستم معادلات وندرموند مانند معادلات ۶، ۷، ۱۳ و ۱۴ ضرایب وزنی را بهدست آورد. هرچند که ماتریس های وندرموند ذاتاً به شرایط ایل شناخته میشوند، در حقیقت تجربه ثابت مىكند ضرايب وزنى كه با حل مستقيم معادلات وندرموند بهدست مي آيند، با افزايش تعداد نقاط شبكه با خطای بیشتری مواجه می شوند. ضرایب وزنی بهدست آمده از روش تحلیلی همینگ<sup>۷</sup> (۱۹۷۳) [۷] دارای دقت بیشتری میباشند. ضرایب وزنی ممکن است صرفنظر از تعداد و محل نقاط شبکه، به صورت مستقیم و با دقتی خوب، با استفاده از فرمول صریح (کـوان و چانـگ^، ۱۹۸۹[۸] و [۹]؛ شو و ریچارد ، ۱۹۹۲[۱۰] و [۱۱]) محاسبه شوند. به سبب دقت بالا و مفیدبودن فرمول شو و ریچارد، در این بخش این فرمول نسبت به متغیر x ارائـه شـده اسـت و بـرای متغیـر y روشی مشابه با متغیر x بایستی انجام شود. درایههای غير قطري ماتريس ضرايب وزني مربوط به مشتق مرتبه اول به اینصورت بیان می شوند:

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k)\Pi(x_k)};$$

 $v=1, v\neq k$ 

$$i, k = 1, 2, \dots, N_x, k \neq i \tag{1V}$$

بەطورىكە

$$\Pi(x_i) = \prod_{\nu=1, \nu \neq i}^{N_x} (x_i - x_\nu),$$
  
$$\Pi(x_k) = \prod_{\nu=1}^{N_x} (x_k - x_\nu)$$
(1A)

درایههای غیرقطری ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبهٔ دوم و بالاتر نیز با استفاده از رابطهٔ بازگشتی زیر محاسبه میشوند: مفندسی مکانیک / شماره ۵۷ / سال بیستم

ریشههای چندجملهای چبیشف نوع دوم

$$x_{i} = \frac{g_{i} - g_{1}}{g_{N_{x}} - g_{1}}, g_{i} = \cos\left(\frac{i\pi}{N_{x} + 1}\right),$$
  
$$i = 1, 2, \dots, N_{x}$$
(YV)

ریشههای چندجملهای لژاندر

$$x_{i} = \frac{g_{i} - g_{1}}{g_{N_{x}} - g_{1}},$$

$$g_{i} = \left(1 - \frac{1}{8N_{x}^{2}} + \frac{1}{8N_{x}^{3}}\right) \cos\left(\frac{4i - 1}{4N_{x} + 2}\pi\right),$$

$$i = 1, 2, \dots, N_{x}$$
(YA)

$$x_{i} = \begin{cases} 2\left(\frac{i-1}{N-1}\right)^{2}, \\ i = 1, 2, \dots, \frac{N_{x}+1}{2} \\ \left(-2\left(\frac{i-1}{N-1}\right)^{2} + 4\left(\frac{i-1}{N-1}\right) - 1\right), \\ i = \left(\frac{N_{x}+1}{2}\right) + 1, \dots, N_{x} \end{cases}$$
(Y4)

ىغاط ىمونە چېيشف – كوس – لوبانو
$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N_x - 1}\right)\pi}{2}$$
  
 $i = 1, 2, \dots, N_x$  (٣٠)

**نتیجهگیری** گفتیم که طی سالیان گذشته این روش بهدلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران در زمینه های گوناگون قرار گرفته است. این مقاله به روش GDQ پرداخته است که به تدریج به عنوان یک روش حل عددی برای مسائل اولیه و مقدار مرزی<sup>(۱)</sup>، در علوم مهندسی و فیزیک مطرح شده است.

$$y_i = \frac{i-1}{N_y - 1}b; \ i = 1, 2, \dots, N_y$$
 (YY)

و بهترتیب در راستای x و y میباشند. با این حال نشان داده شده است که توزیع غیریکنواخت نقاط دقت نتایج بهتری را نسبت به نقاط دقت با فاصلهٔ مساوی می دهد. اگرچه چنین نقاطی ممکن است به صورت آزمایشی انتخاب شوند، اما اساس منطقی نقاط شبکه، از صفرهای چند جمله ای های متعامد نتیجه می شود. مثلاً یکی از روش های به دست آوردن نقاط شبکه به صورت معادلات ۲۳ و ۲۴ است.

$$x_{i} = \frac{1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N_{x} - 1}\right)}{2}a; i = 1, 2, \dots, N_{x}$$
 (YY)

$$y_{i} = \frac{1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N_{y} - 1}\right)}{2}b; i = 1, 2, \dots, N_{y} \quad (\Upsilon F)$$

لازم بهذکر است که در حل مربعات ممکن است تعداد نقاط شبکه در جهتهای مختصاتی گوناگون با هم متفاوت باشد. در حقیقت ممکن است در جهات مختصاتی گوناگون از توابع تست متفاوت استفاده شود. در ادامه توزیع نقاط دقت برای چندین حالت بررسی شده است. انواع توزیع نقاط دقت که در اغلب مقالات استفاده می شود، به این صورت می باشند[۶]: نقاط دقت با فواصل مساوی (یا توزیع یکنواخت):

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1}; \ i = 1, 2, \dots, N_x$$
 (YQ)

$$x_{i} = \frac{g_{i} - g_{1}}{g_{N_{x}} - g_{1}}, g_{i} = \cos\left(\left(\frac{2i - 1}{2N_{x}}\right)\pi\right)$$
$$i = 1, 2, \dots, N_{x}$$
(Y9)

www.SID.ir

F.

- [4] Bellman, R and Roth, R. S., *Methods in approximation*, D Reidel, Netherlands, 1986.
- [5] Bellman, R. E. and Casti, J., "Differential quadrature and long-term integration". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, pp. 235-238.
- [6] Bert, C. W. and Malik, M., "Differential quadrature method in computational mechanics: A review", Appl. Mech. Rev. 49, 1996, pp. 1-28.
- [7] Hamming, R. W., Numerical methods for scientists and engineers, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [8] Quan, J. R.; Chang, C. T., "New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods - I", Comput. Chem. Engrg., 13, 1989, pp. 779-788.
- [9] Quan, J. R.; Chang, C. T., "New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods - II", Comput. Chem. Engrg., 1989, 1017-1024.
- [10] C. Shu and B. E., Richards, "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes equations', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, 1992, pp. 791-798.
- [11] C. Shu and B. E., Richards, "Parallel Simulation of Incompressible Viscous Flows by Generalized Differential Quadrature', *Computing Systems in Engineering*, Vol. 3, 1992, pp. 271-281.

پىنوشت

- 1. GDQ
- 2. DQ
- 3. Initial & Boundary-value Problem
- 4. Vandermonde
- 5. Casti
- 6. ill-conditioned
- 7. Hamming
- 8. Quan & Chang
- 9. Richard
- 10. Quadratic
- 11. Initial & Boundary-value Problem

\* \* \*

کاربرد روش GDQ در منابع موجود، در حوزهٔ مسائل زیستی، فرایندهای حمل ونقل، مکانیک سیالات، استاتیک و دینامیک سازههای مکانیکی است. همچنین ادعا می شود که روش GDQ قابلیت بهدست آوردن نتایج دقیق، با کمترین تـلاش در محاسبات، را داراست. در این مقاله، نخست قاعدهٔ مربعات در دامنههای گوناگون در دو راستا شرح و نشان داده شد که بـرای اجراي روش GDQ بايد ضرايب وزني تعيين شوند. بـههمـين منظور توابع تست معرفي شدند. روابط مربوط به توابع تست چندجملهای نوشته و سیستم معادلات وندرموند مربوط به آن مشخص شد و برای هر مشتقی که مرتبهٔ آن بزرگتر یا مساوی تعداد نقاط شبكه بود، ضرايب وزني صفر بودند. همچنين مشخص شد که برای بهدستآوردن ضرایب وزنی مراتب پالا می توان از ماتریس ضرایب وزنی مرتبهٔ اول و روابط بازگشتی ذکر شده استفاده کرد. علاوه بر این از تأثیر بسیار مهم ضرایب وزنی و نقاط شبکه در دقت و سرعت نتایج روش GDQ بحث شد و یکی از روش های رایج و مهم بهدست آوردن ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبهٔ اول، و با استفاده از روابط بازگشتی برای مراتب بالاتر، توضیح داده شد. نکتهٔ دیگر برای استفاده درست از روش GDQ نحوهٔ انتخاب نقاط شبکه است. همچنین توزیع نقاط دقت نقش مهمی در تعیین دقت، سرعت همگرایی و پایداری روش GDQ، ایفا می کند. نحوهٔ محاسبهٔ ضرایب وزنی با استفاده از معادلهٔ ۱۰ و نیز معادلات ۱۹ و ۲۰ شرح داده و تأثير، سرعت و دقت روش دوم بررسی شد.

## مراجع

- [1] C. Shu, Generalized, Differential-integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation, PhD Thesis, University of Glasgow, 1991.
- [2] Bellman, R. E., *Methods of Nonlinear Analysis*, Academic Press, New York, 1973.
- [3] Bellman, R and Adomian, G., *Partial differential equations*, D Reidel, Netherlands, 1985.
- Email: mech\_mag@yahoo.com Website: www.isme.ir

[·]

٧٢