



ارتعاشات و کمانش صفحات بیضوی کامپوزیتی چندلایه متقارن بر بستر الاستیک وینکلر تحت بار داخل صفحه‌ای اولیه

علیرضا کشمیری^۱، علی قاهری^۲، فتح‌اله طاهری بهروز^{۳*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

۳- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* تهرانی، کدپستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، tazeri@iust.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

در این مقاله، خصوصیات ارتعاشات آزاد و کمانش مربوط به صفحات نازک کامپوزیتی چندلایه متقارن بیضوی تحت بار نرمال داخل صفحه‌ای مرزی اولیه و بر روی بستر الاستیک از نوع وینکلر، بر مبنای تئوری کلاسیک صفحات لایه‌ای بررسی گردیده است. معادلات حاکم با استفاده از رویکرد حساب تغییرات نوشته و به وسیله روش ریتز حل شده‌اند. نتایج عددی برای سه فرکانس طبیعی اول به صورت تابعی از بار داخل صفحه‌ای برای شرایط مرزی متداول آزاد، گیردار و ساده ارائه شده است. همچنین اثر جهت‌گیری الیاف بر فرکانس‌های طبیعی و بارهای کمانشی صفحات زاویه‌دار متقارن چندلایه با توالی لایه‌چینی $[(\beta / -\beta / \beta / -\beta)]_s$ مورد مطالعه قرار گرفته است. در انتها نیز شکل مدهای ارتعاشی دوبعدی صفحات نشان داده شده است. دقت محاسبات با همگرایی بسیار مناسب نتایج بررسی گردیده و همچنین صحت نتایج با مقالات موجود و داده‌های نرم‌افزار المان محدود تصدیق شده است.

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۵ شهریور ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۲ مهر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۰۱ بهمن ۱۳۹۲

کلید واژگان:

نیروهای کمانشی

ارتعاشات آزاد

صفحات کامپوزیتی

بستر وینکلر

Buckling and vibration of symmetrically-laminated composite elliptical plates resting on Winkler-type foundation subjected to initial in-plane stresses

Alireza Keshmiri¹, Ali Ghaehri², Fathollah Taheri-Behrooz^{3*}

1- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

3- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

*P.O.B. 16846-13114 Tehran, tazeri@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 27 August 2013
Accepted 14 October 2013
Available Online 21 January 2014

Keywords:

Buckling Forces
Natural Vibrations
Composite Laminates
Winkler Foundation

ABSTRACT

Buckling and vibration characteristics of thin symmetrically laminated elliptical composite plates under initial in-plane edge loads and resting on Winkler-type elastic foundation are presented based on the classical laminated plate theory. The governing equations are obtained from the variational approach and solved by the Ritz method. Extensive numerical data are provided for the first three natural frequencies as a function of in-plane load for various classical edge conditions (free, clamped and simply supported). Moreover, the effects of fiber orientation on the natural frequencies and buckling loads of laminated angle-ply plates with stacking sequence of $[(\beta / -\beta / \beta / -\beta)]_s$ are studied for chosen foundation parameter. Also, selected deformation mode shapes are illustrated. The accuracy of calculations is checked by performing good convergence studies, and the correctness of results is established by comparison with the existing results in the literature as well as FEM data.

۱- مقدمه

کنترل خواص مکانیکی را با تغییر زاویه الیاف و تعداد لایه‌ها ایجاد می‌کند. در بیشتر کاربردها تقارن نسبت به صفحه میانی وجود دارد که از درگیر شدن خمش عرضی و کشش داخل صفحه‌ای جلوگیری می‌شود.

در مواقعی، هندسه طراحی ایجاب می‌کند که مهندس طراح از شکل‌های دیگری علاوه بر دایروی و مستطیلی برای مسائل کاربردی استفاده کند. برای مثال، قسمت انتهایی تانک‌های حمل سوخت [۱] و دیواره‌ها در تجهیزات

ارتعاشات عرضی و کمانش ورق چند لایه کامپوزیتی، از مسائل معمول در زمینه‌های مختلف مهندسی و فناوری می‌باشند. این نوع سازه‌ها را در کاربردهای متنوع مهندسی مانند صنایع هوایی، حمل و نقل، سازه‌های عمرانی و دریایی که در آن‌ها کاهش وزن بسیار مهم است، می‌توان یافت. در این کاربردها ترکیبی از چند خاصیت مکانیکی مدنظر است. چند لایه کامپوزیتی توانایی

Please cite this article using:

A.R. Keshmiri, A. Ghaehri, F. Taheri-Behrooz, Buckling and vibration of symmetrically-laminated composite elliptical plates resting on Winkler-type foundation subjected to initial in-plane stresses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 19-26, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

www.SID.ir

۲- روابط حاکم

۲-۱- روابط ساختاری چند لایه

شکل ۱ یک صفحه چند لایه متقارن کامپوزیتی متشکل از L لایه با بافت تک‌جهته را نشان می‌دهد. زاویه الیاف نسبت به محور x با β_m نشان داده می‌شود. مدول یانگ طولی لایه‌ها در جهت الیاف E_l و مدول یانگ عرضی E_2 است. روابط ساختاری خطی در حالت تنش صفحه‌ای برای لایه m به صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_m \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}_m \quad (1)$$

که در آن‌ها Q_{ij} ($i, j = x, y, s$) سفتی در مختصات x - y هستند که با در نظر گرفتن زاویه الیاف β_m از ثابت‌های Q_{kl} ($k, l = 1, 2, 6$) مطابق رابطه (۲) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1^m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m} \\ Q_{22} &= \frac{E_2^m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}^m E_1^m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m} \\ Q_{66} &= E_6^m \end{aligned} \quad (2)$$

رابطه بین سفتی‌های محوری با سفتی‌های خارج محور به صورت رابطه (۳) ارائه می‌شود:

$$\{Q_{ij}\}_m = [TM]_m \{Q_{kl}\}_m \quad i, j = x, y, s, \quad k, l = 1, 2, 6 \quad (3)$$

که در آن $[TM]_m$ ماتریس تبدیل سفتی از کامپوزیت تک‌جهته محوری به خارج محور می‌باشد.

در تئوری کلاسیک ورق چند لایه [۱۷]، سفتی کششی و خمشی صفحه با انتگرال‌گیری از رابطه تنش و کرنش در راستای ضخامت به دست می‌آید. چون ورق چندلایه مورد مطالعه متقارن می‌باشد، سفتی کوپل‌شوندگی ($[B_{ij}]_m = 0$) صفر می‌باشد. ماتریس‌های سفتی کششی و خمشی به شکل روابط (۴) و (۵) معرفی می‌شوند:

$$[A_{ij}]_m = 2 \sum_{m=1}^{L/2} [Q_{ij}]_m (z_m - z_{m-1}) \quad (4)$$

$$[D_{ij}]_m = \frac{2}{3} \sum_{m=1}^{L/2} [Q_{ij}]_m (z_m^3 - z_{m-1}^3) \quad (5)$$

در تئوری کلاسیک ورق چند لایه‌ای، میدان جابه‌جایی به شکل معادلات (۶) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

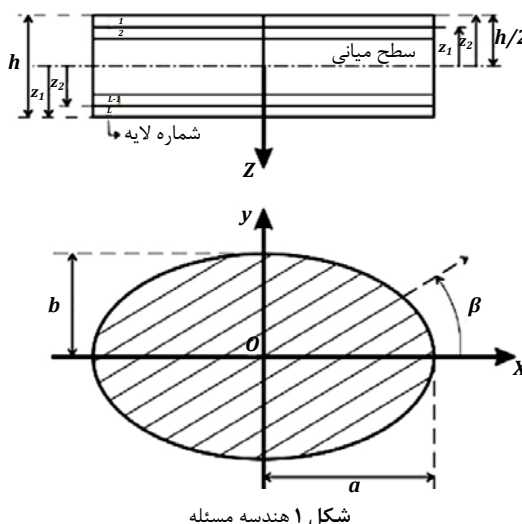
که $u(x, y, t)$ ، $v(x, y, t)$ و $w(x, y, t)$ به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در جهات x ، y و z در صفحه میانی هستند. با جای‌گذاری فرمول (۶) در روابط کرنش-جابه‌جایی در حالت خطی، مؤلفه‌های انحنا و کرنش به صورت رابطه (۷) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_s^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, k_s = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

پتروشیمی و مخازن تحت فشار [۲۰، ۲۱] با ورق بیضوی مدل می‌شوند. همچنین وقتی شکل ورق نزدیک به حالت بیضی است، می‌توان برای سادگی مدل‌سازی تحلیلی آن را به صورت بیضی مدل کرد. برای مثال، یک سازه متشکل از یک ورق مستطیلی و دو ورق نیم دایره‌ای متصل به آن در طرفین را می‌توان با ورق بیضی به صورت تقریبی مدل کرد. بنابراین در این مقاله، ارتعاشات آزاد و کمانش یک ورق بیضی چندلایه کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته است. در ادامه مهم‌ترین فعالیت‌های انجام شده در این زمینه به طور خلاصه بیان شده است.

شارما و میتال [۴] یک گزارش بر تحلیل تنش و ارتعاش صفحات کامپوزیتی ارائه دادند. سپس محققان متعددی رویکردهای تحلیلی متنوعی همچون روش ریلی-ریتز [۵-۸] را برای مطالعه رفتار دینامیک صفحات معمولی و دایروی لایه‌ای با خواص مادی و شرایط مرزی گوناگون و همچنین اثرات پیچیده مختلف همچون برش، ممان اینرسی، ضخامت و ارگذاری داخل صفحه‌ای به کار برده‌اند. از سوی دیگر، به دلیل پیچیدگی روش‌های تحلیلی و عددی در شبیه‌سازی خواص ارتعاشاتی صفحات بیضی، این گونه صفحات بسیار کم مورد بررسی قرار گرفته‌اند. متیو [۹] برای اولین بار ارتعاشات یک صفحه نازک بیضی را مطالعه نمود. آیری و یامادا [۱۰] با استفاده از روش ریلی-ریتز، ارتعاشات آزاد یک صفحه بیضی ارتوتروپیک با سوراخی مشابه در وسط آن را بررسی کردند. چاکراورتی و پتیت [۱۱] به ارتعاشات عرضی صفحات ناهمگن دایروی و بیضی با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد دو بعدی در روش ریلی-ریتز با شرایط مرزی گوناگون پرداختند. کیم [۱۲] فرکانس‌های طبیعی صفحات ارتوتروپیک دایروی و بیضی را با استفاده از روش ریلی-ریتز استخراج نمود. گوپتا و کومار [۱۳] نیز به کمک روش گلرکین معادلات دیفرانسیلی ارتعاشات صفحات بیضی و اسکالاستیک ناهمگن را حل و مورد مطالعه قرار دادند. نلیم و گروسی [۱۴] ارتعاشات آزاد ورق بیضی حلقوی چند لایه متقارن را تحت شرایط مرزی الاستیک و وجود جرم متمرکز، به کمک روش ریتز بررسی کردند. در مورد ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی با خواص و ویژگی‌های گوناگون، مقالاتی در منابع فارسی نیز مورد مطالعه قرار گرفته [۱۵، ۱۶] که هر یک با روشی خاص فرایند تحلیل را پیش برده‌اند.

با توجه به مرور منابع مشخص می‌شود که هیچ کار تحلیلی یا عددی برای حل ارتعاشات و کمانش یک ورق بیضی چند لایه متقارن کامپوزیتی تحت اثر بارگذاری داخل صفحه‌ای انجام نشده است. هدف این مقاله استفاده از روش انرژی و تئوری کلاسیک ورق برای محاسبه بار بحرانی و فرکانس‌های طبیعی یک چند لایه متقارن با شرایط مرزی گوناگون است.



شکل ۱ هندسه مسئله

۲-۲- روابط انرژی

با توجه به نازک بودن ورق چند لایه، انرژی جنبشی آن به شکل رابطه (۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \rho(z) \dot{w}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \int_A \rho w^2 dx dy \quad (8)$$

انرژی کرنشی کلی صفحه چند لایه به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A [\varepsilon]^T [\sigma] dx dy dz \quad (9)$$

و انرژی پتانسیل حاصل از نیروی داخل صفحه‌ای را می‌توان به شکل معادله (۱۰) نوشت:

$$U_{ex} = + \frac{1}{2} \int_A N \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (10)$$

همچنین برای انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک داریم:

$$U_f = \frac{1}{2} \int K_w w^2|_{z=-h/2} dA \quad (11)$$

در نهایت انرژی کلی سازه الاستیک مطابق معادله (۱۲) بیان می‌شود:

$$\pi = U_s + U_f + U_{ex} - T \quad (12)$$

۳-۲- روش ریتز

روش ریتز بر پایه اصل تغییرات [۱۸]، برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی کمانش ورق چند لایه به کار گرفته شده است. شکل کاهش یافته مربوط به معادله (۱۲)، به صورت رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta \pi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \delta ([\varepsilon]^T [Q] [\varepsilon]) dx dy dz \\ + \int_A [K_w w \delta \\ + N \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \\ - \rho \dot{w} \delta \dot{w}] dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، جابه‌جایی ورق در راستای محور z به صورت حرکت هارمونیک فرض می‌شود:

$$w(x, y, t) \approx w_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (14)$$

در رابطه فوق ω نشان دهنده فرکانس طبیعی و $w_0(x, y)$ دامنه جابه‌جایی می‌باشد. با انتگرال گرفتن در راستای z و جایگذاری معادله (۱۴) در معادله (۱۳)، رابطه (۱۵) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta \pi = \iint_A \left[(N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_s \delta \varepsilon_s^0 + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y \right. \\ \left. + M_s \delta k_s) + K_w w_0 \delta w_0 \right. \\ \left. + N \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \rho \omega^2 w_0 \delta w_0 \right] dx dy \end{aligned} \quad (15)$$

و نتیجه‌های ممان و نتیجه‌های تنش در هر لایه که در رابطه (۱۵) آورده شدند، عبارت‌انداز:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & 0 & 0 & 0 \\ & A_{yy} & A_{ys} & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ & & & & D_{yy} & D_{ys} \\ & & & & & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \quad (16)$$

چون در این مسئله $[B_{ij}]_m = 0$ ، در نتیجه معادلات حرکت عرضی و داخل صفحه‌ای ورق چندلایه از هم جدا می‌شوند. در اینجا فقط ارتعاشات و کمانش عرضی مورد مطالعه است. در روش ریتز تابع نامعلوم جابه‌جایی (w_0) با

ترکیب خطی توابع w_{ij} به شکل رابطه (۱۷) تقریب زده می‌شود:

$$w_0(x, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{ij} w_{ij}(x, y) \quad (17)$$

با جایگذاری معادله (۱۶) و (۱۷) در معادله (۱۵)، رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta \pi = \sum_{p=0}^I \sum_{q=0}^J \delta c_{pq} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{ij} \iint_A \left[\left(D_{xx} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2D_{xs} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w_{pq}}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \left(D_{xy} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2D_{ys} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w_{pq}}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2 \left(D_{xs} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + D_{ys} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2D_{ss} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w_{pq}}{\partial x \partial y} + K_w w_{ij} w_{pq} \right. \\ \left. + N \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial x} \frac{\partial w_{pq}}{\partial x} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \frac{\partial w_{pq}}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \rho \omega^2 w_{ij} w_{pq} \right] dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

و چون δc_{pq} دلخواه و مستقل خطی هستند، روابط بالا به شکل رابطه (۱۹) ساده می‌شوند:

$$(K_t + K_{ex} N - M \omega^2) C = 0 \quad (19)$$

که در آن K_{ex} ماتریس سفتی و شامل عبارات مربوط به انرژی پتانسیل نیروی داخل صفحه‌ای، K_t ماتریس مربوط به انرژی کرنشی و M ماتریس مربوط به انرژی جنبشی هستند.

در روش ریتز یک مجموعه کامل از توابع تقریبی که شرایط مرزی هندسی را ارضا کنند، کافی می‌باشد. همچنین شرایط مرزی هندسی برای صفحه چندلایه کامپوزیتی عبارت‌انداز:

$$\begin{aligned} w|_r = \frac{\partial w}{\partial n}|_r = 0 \\ w|_r = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن منحنی Γ با معادله $(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0)$ مشخص شده و n نیز بردار عمود بر مرز می‌باشد [۱۴]. شرایط مرزی طبیعی تنها در صورتی ارضا خواهند شد که تعداد توابع تقریبی به بی‌نهایت برسد [۱۹]. بنابراین، توابع تقریبی به صورت رابطه (۲۱) فرض می‌شوند:

$$w_{ij}(x, y) = x^i y^j \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^{bc} \quad (21)$$

برای ارضا نمودن شرایط مرزی، $bc = 0$ برای شرایط مرزی آزاد، $bc = 1$ برای شرایط مرزی ساده و $bc = 2$ برای شرایط مرزی گیردار در نظر گرفته می‌شود. در نهایت مسئله مقدار ویژه برای صفحه چند لایه به شکل معادله (۲۲) بیان می‌گردد:

$$(K_t + K_{ex} N - M \omega^2) C = 0 \quad (22)$$

این دستگاه معادلات خطی در حالتی جواب غیر صفر ($C \neq 0$) دارد که، دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. در این صورت مقادیر ویژه حاصل، فرکانس‌های طبیعی صفحه هستند. برای بار کمانشی بحرانی نیز سیستم بدون ارتعاشات ($\omega = 0$)، باید حل شود. پس خواهیم داشت:

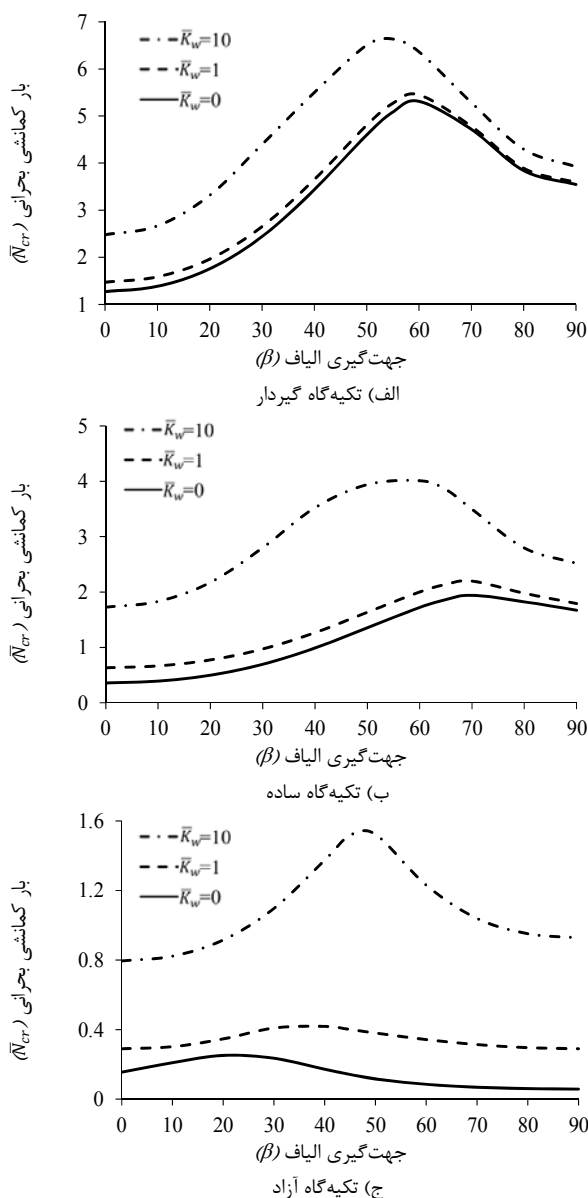
$$(K_t + K_{ex} N) C = 0 \quad (23)$$

۳- نتایج عددی

برای محاسبه بار کمانشی بحرانی و فرکانس طبیعی صفحات کامپوزیتی

مرزی اتفاق می‌افتد که دلیل آن افزایش ضریب و تاثیر مستقیم آن در انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک می‌باشد. همچنین می‌توان اثر اعمال قیود بیشتر تکیه‌گاهی و افزایش عمومی بار کمانشی ورق چندلایه کامپوزیتی را مشاهده نمود.

تغییرات سه فرکانس طبیعی اول صفحات کامپوزیتی بیضوی با لایه‌چینی $[(\beta/-\beta/\beta/-\beta)]_s$ و با جهت‌گیری الیاف $(\beta = 0 \rightarrow 90)$ برای نسبت خروج از مرکز $(a/b = 2)$ تحت شرایط مرزی گوناگون در شکل ۳ رسم شده است. تاثیر پارامتر بستر الاستیک $\bar{K}_w = 0, 10$ نیز بررسی شده که بیانگر اثر افزایشی بر فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. یک روند افزایشی کلی در فرکانس‌های طبیعی با افزایش پارامتر بستر الاستیک مستقل از شرایط مرزی ملاحظه می‌گردد که به دلیل افزایش پارامتر بستر و تاثیر مستقیم آن در انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک می‌باشد. روند عموماً افزایشی مقادیر فرکانس‌های طبیعی با افزایش زاویه لایه‌چینی ورق چندلایه کامپوزیتی در تکیه‌گاه آزاد دیده نمی‌شود که دلیل عمده آن می‌تواند عدم وجود قیود مناسب مرزی برای تحلیل مناسب باشد.



شکل ۲ تغییرات بار کمانشی بحرانی صفحات کامپوزیتی بیضوی برحسب جهت‌گیری الیاف

بیضوی و همچنین مطالعه تاثیر پارامترهای مختلفی همچون خروج از مرکز، بستر الاستیک وینکلر و شرایط مرزی متفاوت بر آن‌ها، مثال‌های عددی متنوعی در این مقاله ارائه شده است. یک صفحه کامپوزیتی بیضوی کربن-اپوکسی ($E_1 = 138 \text{ GPa}$, $E_2 = 8.96 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.3$, $E_6 = 7.1 \text{ GPa}$) با لایه‌چینی $[(\beta/-\beta/\beta/-\beta)]_s$ ، $[(0/90)_2]_s$ و $[(90/0)_2]_s$ تحت شرایط مرزی مختلف (آزاد، ساده و گیردار) مورد نظر قرار می‌گیرد. همچنین نسبت خروج از مرکز صفحه بیضوی $(0.1 \leq a/b \leq 3, b = 0.1 \text{ m})$ ، ضخامت هر لایه $(h = 125 \mu\text{m})$ و ضریب سختی بی‌بعد بستر الاستیک $(\bar{K}_w = K_w b^4 / D)$ در آن $(D = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}))$ در نظر گرفته می‌شود که در آن $(0.1, 10)$ می‌باشد.

آنالیز همگرایی بار کمانشی بحرانی بی‌بعد $(\bar{N}_{cr} = |N_{cr}| b^2 / D)$ صفحات چند لایه بیضوی با لایه‌چینی $[(\beta/-\beta/\beta/-\beta)]_s$ که در آن $(\beta = 0, 45, 90)$ ، نسبت خروج از مرکز $(a/b = 1, 2)$ و پارامتر بستر الاستیک $(\bar{K}_w = 0, 10)$ تحت شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار انجام شده و نتایج آن در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین در آخرین سطر هر زیرجدول، نتایج به‌دست آمده از تحلیل اجزاء محدود در نرم‌افزار آباکوس مشخص می‌باشد.

جدول ۲ بیانگر آنالیز همگرایی نتایج سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد $(\bar{N}_{cr} = |N_{cr}| b^2 / D)$ صفحات کامپوزیتی بیضوی با لایه‌چینی $[(\beta/-\beta/\beta/-\beta)]_s$ که در آن $(\beta = 0, 45)$ ، نسبت خروج از مرکز $(a/b = 2)$ و پارامتر بارگذاری داخل صفحه $(N = 0, -N_{cr}/2)$ تحت شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار می‌باشد. با توجه به روش مورد استفاده در این مقاله، همگرایی خوبی در نتایج به‌دست آمده است.

قبل از ارائه نتایج نهایی مقاله، اعتبار فرمولاسیون اثبات می‌گردد. با توجه به اطلاعات و دانسته‌های نویسندگان این مقاله، تا کنون هیچ مقاله و داده‌ای در مورد بار کمانشی بحرانی صفحات کامپوزیتی بیضوی با لایه‌چینی عمومی در دستگاه کارتزین به چاپ نرسیده است. لذا دقت محاسبات بارهای کمانشی بحرانی $(\bar{N}_{cr} = |N_{cr}| b^2 / D_0)$ که در آن $(D_0 = E h^3 / 12(1 - \nu^2))$ می‌باشد، با استفاده از روش جاری در مقاله برای صفحات ایزوتروپیک بیضوی $(\nu = 0.3)$ با پارامترهای خروج از مرکز و بستر الاستیک معین تحت شرایط مرزی متفاوت (آزاد، ساده و گیردار) با نتایج دقیق [۲۰، ۲۱] و نتایج تحلیل اجزاء محدود در نرم‌افزار در جدول ۳ مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی برای نتایج تحلیلی به‌دست آمده، مشاهده گشت.

جدول ۴ نیز چهار فرکانس طبیعی اول بی‌بعد $(\bar{N}_{cr} = |N_{cr}| b^2 / D)$ محاسبه شده برای صفحه کامپوزیتی بیضوی $(a/b = 2)$ با لایه‌چینی $[(30/-30)_2]_s$ تحت شرایط مرزی متفاوت و پارامتر بستر الاستیک صفر را ارائه می‌کند. نتایج به‌دست آمده با نتایج محاسبه شده [۱۴] و نتایج به‌دست آمده از تحلیل اجزاء محدود انجام شده توسط نویسندگان مقاله در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. شایان ذکر است که در شبیه‌سازی‌های انجام شده به کمک نرم‌افزار، بیش از ۲۰۰۰ المان ۸S8R5، برای مدل‌سازی ورق بیضوی چند لایه استفاده شده است.

در شکل ۲ تغییرات بار کمانشی بحرانی صفحات کامپوزیتی بیضوی با لایه‌چینی $[(\beta/-\beta/\beta/-\beta)]_s$ و با جهت‌گیری الیاف $(\beta = 0 \rightarrow 90)$ برای نسبت خروج از مرکز $(a/b = 2)$ تحت پارامتر بستر الاستیک $(\bar{K}_w = 0, 1, 10)$ و شرایط مرزی گوناگون رسم شده است. یک افزایش کلی در بارهای کمانشی بحرانی بر اثر افزایش پارامتر بستر الاستیک مستقل از نوع شرایط

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، خصوصیات کمانشی و ارتعاشی صفحات کامپوزیتی بیضوی با لایه‌چینی متقارن تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای مرزی اولیه و بر روی بستر الاستیک نوع وینکلر برای شرایط مرزی کلاسیک مبتنی بر تابع انرژی پتانسیل کل در تعامل با روش ریتز مطالعه و بررسی گشت. مطالعات صورت گرفته بیانگر این حقیقت هستند که، ویژگی‌های استاتیکی و دینامیکی صفحات چند لایه‌ای متأثر از توالی لایه‌چینی، جهت‌گیری الیاف، نسبت خروج از مرکز، بارگذاری داخل صفحه‌ای و پارامتر بستر می‌باشد. به‌طور خاص مشاهدات زیر گزارش می‌گردد:

۱. یک روند افزایشی کلی در بارهای کمانشی بحرانی با افزایش پارامتر بستر الاستیک مشاهده می‌گردد. همچنین با افزایش زاویه جهت‌گیری الیاف، یک رشد کلی در بار کمانشی بحرانی و سپس یک افت قابل ملاحظه در زاویه مشخصی از جهت‌گیری الیاف برای شرایط مرزی گوناگون ملاحظه می‌شود.

شکل ۴ نشان‌دهنده چگونگی اثر نیروی داخل صفحه‌ای بر سه فرکانس طبیعی اول صفحات چندلایه‌ای بیضوی با لایه‌چینی $[(0/90)_2]_s$ و $[(90/0)_2]_s$ تحت شرایط مرزی مختلف و پارامتر بستر الاستیک صفر برای نسبت خروج از مرکز $(a/b = 2)$ می‌باشد. نیروهای داخل صفحه‌ای فشاری موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی شده و آن‌ها را در بار کمانش بحرانی صفر می‌کنند که یکی از اهداف عمده مقاله نشان دادن این تقارن بوده است. در حالی که، نیروهای کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شوند که در شکل نیز نشان داده شده است.

در انتها، شکل ۵ نیز مدهای جابه‌جایی عرضی مربوط به سه فرکانس طبیعی اول صفحات کامپوزیتی بیضوی با لایه‌چینی $[(B/-\beta/B/-\beta)]_s$ با مقادیر $(\beta = 0, 30, 60, 90)$ و نسبت خروج از مرکز $(a/b = 2)$ تحت شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار نشان می‌دهد.

جدول ۱ آنالیز همگرایی بار کمانشی بحرانی بی‌بعد صفحات چند لایه بیضوی

a/b	R_{wv}	I=J	تکیه‌گاه گیردار			تکیه‌گاه ساده			تکیه‌گاه آزاد		
			$\beta = 90^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 90^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 90^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$
۱		۴	۴/۴۲۱۹	۶/۲۳۵۷	۴/۴۲۱۹	۱/۷۱۶۷	۱/۷۷۷۱	۱/۷۱۶۷	۰/۲۵۶۹	۰/۴۰۹۲	۰/۲۵۶۹
		۵	۴/۲۴۲۸	۶/۲۲۶۶	۴/۲۴۲۸	۱/۶۶۸۵	۱/۷۷۷۱	۱/۶۶۸۵	۰/۲۲۹۰	۰/۳۹۶۵	۰/۲۲۹۰
		۶	۴/۲۱۵۳	۶/۲۲۶۶	۴/۲۱۵۳	۱/۶۶۸۵	۱/۷۷۷۱	۱/۶۶۸۵	۰/۲۲۹۰	۰/۳۹۶۵	۰/۲۲۹۰
		۷	۴/۱۸۳۱	۶/۲۲۶۵	۴/۱۸۳۱	۱/۶۶۶۲	۱/۷۷۷۱	۱/۶۶۶۲	۰/۲۲۸۹	۰/۳۹۶۵	۰/۲۲۸۹
		۸	۴/۱۸۳۱	۶/۲۲۶۵	۴/۱۸۳۱	۱/۶۶۶۲	۱/۷۷۷۱	۱/۶۶۶۲	۰/۲۲۸۹	۰/۳۹۶۵	۰/۲۲۸۹
		۹	۴/۱۸۰۲	۶/۲۲۶۵	۴/۱۸۰۲	۱/۶۶۶۲	۱/۷۷۷۱	۱/۶۶۶۲	۰/۲۲۸۹	۰/۳۹۶۵	۰/۲۲۸۹
		۱۰	۴/۱۸۰۲	۶/۲۲۶۵	۴/۱۸۰۲	۱/۶۶۶۲	۱/۷۷۷۱	۱/۶۶۶۲	۰/۲۲۸۹	۰/۳۹۶۵	۰/۲۲۸۹
		المان محدود	۴/۱۵۳۸	۶/۲۰۷۱	۴/۱۵۳۴	۱/۶۶۳۸	۱/۷۷۵۷	۱/۶۶۴۰	۰/۲۲۸۸	۰/۳۹۶۱	۰/۲۲۸۸
		۴	۴/۸۹۰۴	۷/۵۵۷۳	۴/۸۹۰۴	۲/۶۴۶۵	۳/۴۹۹۴	۲/۶۴۶۵	۰/۸۷۸۸	۱/۲۴۲۵	۰/۸۷۸۸
		۵	۴/۷۳۰۸	۷/۵۳۸۲	۴/۷۳۰۸	۲/۶۴۶۴	۳/۴۹۹۱	۲/۶۴۶۴	۰/۸۷۲۸	۱/۲۴۲۴	۰/۸۷۲۸
۱۰		۶	۴/۶۲۵۵	۷/۵۳۸۱	۴/۶۲۵۵	۲/۵۷۳۳	۳/۴۹۹۱	۲/۵۷۳۳	۰/۸۷۲۸	۱/۲۴۲۴	۰/۸۷۲۸
		۷	۴/۶۲۵۵	۷/۵۳۷۹	۴/۶۲۵۵	۲/۵۷۳۳	۳/۴۹۹۱	۲/۵۷۳۳	۰/۸۵۰۲	۱/۲۳۵۶	۰/۸۵۰۲
		۸	۴/۶۰۱۷	۷/۵۳۷۹	۴/۶۰۱۷	۲/۵۶۹۴	۳/۴۹۹۱	۲/۵۶۹۴	۰/۸۵۰۲	۱/۲۳۵۶	۰/۸۵۰۲
		۹	۴/۶۰۱۷	۷/۵۳۷۹	۴/۶۰۱۷	۲/۵۶۹۴	۳/۴۹۹۱	۲/۵۶۹۴	۰/۸۵۰۲	۱/۲۳۵۶	۰/۸۵۰۲
		۱۰	۴/۶۰۱۷	۷/۵۳۷۹	۴/۶۰۱۷	۲/۵۶۹۳	۳/۴۹۹۱	۲/۵۶۹۳	۰/۸۵۰۲	۱/۲۳۵۶	۰/۸۵۰۲
		المان محدود	۴/۵۶۱۷	۷/۵۱۹۱	۴/۵۶۲۰	۲/۵۶۶۰	۳/۴۹۷۷	۲/۵۶۶۰	۰/۸۴۹۸	۱/۲۳۵۰	۰/۸۴۹۸
		۴	۴/۰۵۱۷	۵/۷۱۴۵	۵/۷۱۴۵	۰/۳۵۷۹	۱/۱۶۷۹	۲/۱۷۷۶	۰/۱۵۵۱	۰/۱۵۰۴	۰/۰۶۴۵
		۵	۴/۰۳۴۹	۴/۸۸۴۴	۴/۰۳۴۹	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۷۳	۱/۸۷۲۳	۰/۱۵۵۱	۰/۱۴۲۲	۰/۰۵۷۵
		۶	۴/۰۳۴۹	۴/۰۳۴۹	۴/۰۳۴۹	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۷۳	۱/۸۲۱۳	۰/۱۵۵۱	۰/۱۴۲۲	۰/۰۵۷۵
		۷	۴/۰۳۴۴	۴/۰۳۴۴	۴/۰۳۴۴	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۷۳	۱/۷۱۶۸	۰/۱۵۵۱	۰/۱۴۲۲	۰/۰۵۷۵
۱۰		۸	۴/۰۳۴۴	۴/۰۳۴۴	۴/۰۳۴۴	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۷۳	۱/۷۱۱۱	۰/۱۵۵۱	۰/۱۴۲۲	۰/۰۵۷۵
		۹	۴/۰۳۴۳	۳/۶۹۸۱	۴/۰۳۴۳	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۷۳	۱/۶۷۷۹	۰/۱۵۵۱	۰/۱۴۲۲	۰/۰۵۷۵
		۱۰	۴/۰۳۴۳	۳/۶۹۸۱	۴/۰۳۴۳	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۷۳	۱/۶۷۷۹	۰/۱۵۵۱	۰/۱۴۲۲	۰/۰۵۷۵
		المان محدود	۴/۰۲۲۴	۳/۵۴۴۸	۴/۰۲۲۴	۰/۳۵۷۳	۱/۱۶۵۸	۱/۶۷۰۰	۰/۱۵۵۰	۰/۱۴۲۱	۰/۰۵۷۵
		۴	۲/۴۹۶۷	۶/۱۲۸۹	۶/۱۲۸۹	۱/۷۳۳۱	۳/۷۹۲۱	۳/۷۲۵۸	۰/۸۳۰۲	۱/۶۸۰۲	۱/۲۰۷۳
		۵	۲/۴۹۶۷	۶/۰۷۲۱	۵/۷۱۴۷	۱/۷۳۳۱	۳/۷۸۶۴	۳/۲۸۴۸	۰/۸۲۰۰	۱/۵۴۳۰	۰/۹۹۵۲
		۶	۲/۴۷۹۹	۶/۰۷۱۴	۵/۰۴۶۲	۱/۷۲۶۳	۳/۷۸۳۷	۲/۹۷۸۹	۰/۸۲۰۰	۱/۵۳۹۴	۰/۹۹۵۲
		۷	۲/۴۷۹۹	۶/۰۶۷۴	۴/۶۱۴۳	۱/۷۲۶۳	۳/۷۸۳۷	۲/۷۵۵۶	۰/۷۹۵۶	۱/۵۲۰۱	۰/۹۶۷۶
		۸	۲/۴۷۹۶	۶/۰۶۷۴	۴/۳۴۲۸	۱/۷۲۶۲	۳/۷۸۳۷	۲/۶۳۶۴	۰/۷۹۵۶	۱/۵۲۰۱	۰/۹۳۴۲
		۹	۲/۴۷۹۶	۶/۰۶۷۳	۴/۱۷۹۴	۱/۷۲۶۲	۳/۷۸۳۷	۲/۵۶۸۲	۰/۷۹۵۵	۱/۵۱۹۱	۰/۹۲۹۲
۱۰		۱۰	۲/۴۷۹۶	۶/۰۶۷۳	۴/۰۶۳۱	۱/۷۲۶۲	۳/۷۸۳۷	۲/۵۳۹۴	۰/۷۹۵۵	۱/۵۱۹۱	۰/۹۲۹۲
		المان محدود	۲/۴۷۹۳	۶/۰۶۸۵	۳/۹۶۵۵	۱/۷۲۵۴	۳/۷۷۷۳	۲/۵۱۷۶	۰/۷۹۵۲	۱/۵۱۸۱	۰/۹۲۷۹

جدول ۲ آنالیز همگرایی سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد صفحات چند لایه بیضوی

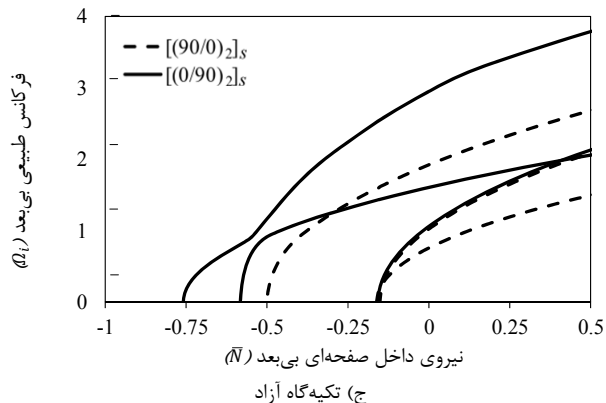
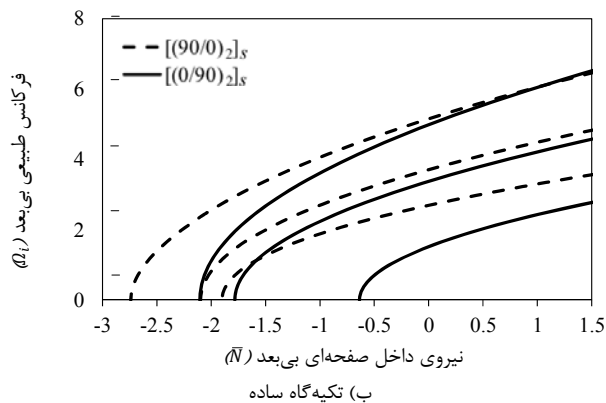
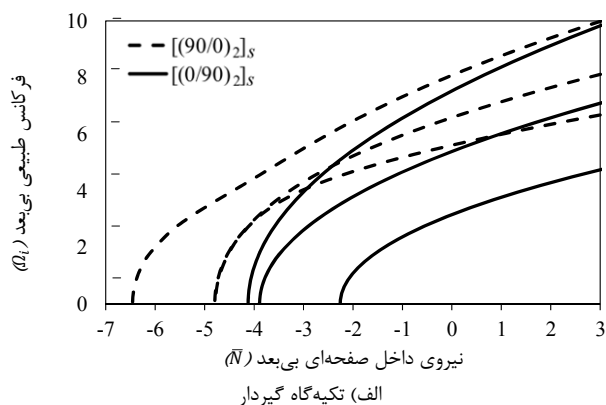
β	N	$I=J$	تکیه‌گاه گیردار			تکیه‌گاه ساده			تکیه‌گاه آزاد		
			Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3
		۴	۲/۴۰۴۶	۴/۹۷۸۳	۵/۰۳۲۵	۱/۱۴۰۶	۳/۲۵۲۵	۳/۲۹۳۵	۱/۰۴۶۹	۱/۶۸۰۱	۲/۳۸۹۱
		۵	۲/۴۰۴۴	۴/۹۷۷۷	۵/۰۳۱۹	۱/۱۳۸۹	۳/۲۴۶۲	۳/۲۸۶۸	۱/۰۴۶۹	۱/۵۱۵۹	۲/۰۸۲۳
		۶	۲/۴۰۴۴	۴/۹۷۵۶	۵/۰۲۹۸	۱/۱۳۸۹	۳/۲۳۰۷	۳/۲۷۱۳	۱/۰۴۴۳	۱/۵۱۵۹	۲/۰۸۲۳
		۷	۲/۴۰۴۴	۴/۹۷۵۶	۵/۰۲۹۸	۱/۱۳۸۹	۳/۲۳۰۷	۳/۲۷۱۲	۱/۰۴۴۳	۱/۵۰۷۲	۲/۰۶۱۹
		۸	۲/۴۰۴۴	۴/۹۷۵۶	۵/۰۲۹۸	۱/۱۳۸۹	۳/۲۳۰۶	۳/۲۷۱۱	۱/۰۴۴۳	۱/۵۰۷۲	۲/۰۶۱۹
		۹	۲/۴۰۴۴	۴/۹۷۵۶	۵/۰۲۹۸	۱/۱۳۸۹	۳/۲۳۰۶	۳/۲۷۱۱	۱/۰۴۴۳	۱/۵۰۷۲	۲/۰۶۱۹
		۱۰	۲/۴۰۴۴	۴/۹۷۵۶	۵/۰۲۹۸	۱/۱۳۸۹	۳/۲۳۰۶	۳/۲۷۱۱	۱/۰۴۴۳	۱/۵۰۷۲	۲/۰۶۱۹
		المان محدود	۲/۴۰۳۴	۴/۹۷۱۵	۵/۰۲۶۹	۱/۱۳۸۸	۳/۲۲۸۰	۳/۲۶۹۴	۱/۰۴۳۷	۱/۵۰۶۲	۲/۰۶۱۶
		۴	۱/۷۲۶۶	۴/۰۷۸۱	۴/۴۷۶۳	۰/۸۰۷۳	۲/۹۵۰۳	۳/۰۷۰۰	۰/۷۴۲۴	۱/۴۷۶۰	۲/۱۶۴۸
		۵	۱/۷۲۵۷	۴/۰۷۷۶	۴/۴۷۴۹	۰/۸۰۵۵	۲/۹۴۴۰	۳/۰۶۲۵	۰/۷۴۲۴	۱/۳۰۴۹	۱/۸۶۳۲
		۶	۱/۷۲۵۷	۴/۰۷۳۸	۴/۴۷۲۸	۰/۸۰۵۵	۲/۹۲۷۱	۳/۰۴۷۴	۰/۷۴۱۱	۱/۳۰۴۹	۱/۸۶۳۲
		۷	۱/۷۲۵۷	۴/۰۷۳۸	۴/۴۷۲۸	۰/۸۰۵۵	۲/۹۲۷۱	۳/۰۴۷۴	۰/۷۴۱۱	۱/۲۹۸۳	۱/۸۴۶۸
	$-\infty/\Delta N_{cr}$	۸	۱/۷۲۵۷	۴/۰۷۳۸	۴/۴۷۲۸	۰/۸۰۵۵	۲/۹۲۷۰	۳/۰۴۷۳	۰/۷۴۱۱	۱/۲۹۸۳	۱/۸۴۶۸
		۹	۱/۷۲۵۷	۴/۰۷۳۸	۴/۴۷۲۸	۰/۸۰۵۵	۲/۹۲۷۰	۳/۰۴۷۳	۰/۷۴۱۱	۱/۲۹۸۳	۱/۸۴۶۸
		۱۰	۱/۷۲۵۷	۴/۰۷۳۸	۴/۴۷۲۸	۰/۸۰۵۵	۲/۹۲۷۰	۳/۰۴۷۳	۰/۷۴۱۱	۱/۲۹۸۳	۱/۸۴۶۸
		المان محدود	۱/۷۲۴۶	۴/۰۷۰۹	۴/۴۶۸۶	۰/۸۰۵۴	۲/۹۲۵۲	۳/۰۴۴۶	۰/۷۴۰۲	۱/۲۹۷۰	۱/۸۴۶۵
		۴	۴/۲۵۰۴	۶/۴۲۰۵	۹/۹۶۷۷	۲/۰۴۸۳	۳/۹۳۴۴	۷/۱۲۰۳	۰/۷۶۸۶	۲/۰۸۵۳	۲/۵۱۵۰
		۵	۴/۲۴۸۴	۶/۴۲۰۲	۹/۱۵۴۶	۲/۰۴۶۷	۳/۹۳۲۰	۶/۴۱۱۹	۰/۷۲۲۷	۲/۰۸۱۲	۲/۵۰۱۶
		۶	۴/۲۴۸۴	۶/۴۰۵۶	۹/۱۵۳۳	۲/۰۴۶۷	۳/۹۰۹۴	۶/۴۰۶۵	۰/۷۲۲۷	۲/۰۶۸۶	۲/۱۲۴۱
		۷	۴/۲۴۸۴	۶/۴۰۵۶	۹/۰۹۲۶	۲/۰۴۶۶	۳/۹۰۹۴	۶/۲۸۴۲	۰/۷۲۰۸	۲/۰۶۷۸	۲/۱۲۳۶
		۸	۴/۲۴۸۴	۶/۴۰۵۳	۹/۰۹۲۶	۲/۰۴۶۶	۳/۹۰۸۸	۶/۲۸۴۱	۰/۷۲۰۸	۲/۰۶۷۷	۲/۰۹۶۷
		۹	۴/۲۴۸۴	۶/۴۰۵۳	۹/۰۹۲۶	۲/۰۴۶۶	۳/۹۰۸۸	۶/۲۷۹۲	۰/۷۲۰۸	۲/۰۶۷۷	۲/۰۹۶۷
		۱۰	۴/۲۴۸۴	۶/۴۰۵۳	۹/۰۹۲۶	۲/۰۴۶۶	۳/۹۰۸۸	۶/۲۷۹۲	۰/۷۲۰۸	۲/۰۶۷۷	۲/۰۹۶۷
		المان محدود	۴/۲۳۰۵	۶/۳۵۳۹	۹/۰۰۱۸	۲/۰۴۵۲	۳/۹۰۲۲	۶/۲۶۶۳	۰/۷۲۰۳	۲/۰۶۲۹	۲/۰۹۲۳
		۴	۳/۰۴۲۶	۵/۱۰۱۴	۸/۷۳۲۰	۱/۴۵۰۰	۳/۴۱۷۳	۶/۶۲۵۶	۰/۵۵۸۶	۱/۹۶۳۳	۲/۳۸۱۲
		۵	۳/۰۳۷۵	۵/۱۰۰۴	۷/۷۷۴۹	۱/۴۴۸۶	۳/۴۱۴۳	۵/۹۱۶۲	۰/۵۱۲۸	۱/۹۵۸۲	۲/۳۶۷۹
		۶	۳/۰۳۷۵	۵/۰۷۶۷	۷/۷۷۲۲	۱/۴۴۸۶	۳/۳۹۲۳	۵/۹۰۹۸	۰/۵۱۲۸	۱/۹۴۷۱	۱/۹۹۳۰
		۷	۳/۰۳۷۵	۵/۰۷۶۷	۷/۶۹۱۳	۱/۴۴۸۵	۳/۳۹۲۳	۵/۷۸۷۱	۰/۵۱۱۹	۱/۹۴۶۳	۱/۹۹۲۶
	$-\infty/\Delta N_{cr}$	۸	۳/۰۳۷۵	۵/۰۷۶۱	۷/۶۵۹۱	۱/۴۴۸۵	۳/۳۹۱۶	۵/۷۸۷۰	۰/۵۱۱۹	۱/۹۴۶۲	۱/۹۶۸۴
		۹	۳/۰۳۷۵	۵/۰۷۶۱	۷/۶۴۱۳	۱/۴۴۸۵	۳/۳۹۱۶	۵/۷۸۲۰	۰/۵۱۱۹	۱/۹۴۶۲	۱/۹۶۸۴
		۱۰	۳/۰۳۷۵	۵/۰۷۶۱	۷/۶۴۱۳	۱/۴۴۸۵	۳/۳۹۱۶	۵/۷۸۲۰	۰/۵۱۱۹	۱/۹۴۶۲	۱/۹۶۸۴
		المان محدود	۳/۰۱۸۹	۵/۰۲۴۱	۷/۵۹۸۳	۱/۴۴۶۶	۳/۳۸۴۱	۵/۷۶۸۱	۰/۵۱۱۲	۱/۹۴۱۰	۱/۹۶۳۷

جدول ۳ مقایسه بارهای کمانشی بحرانی بی‌بعد صفحات چند لایه بیضوی

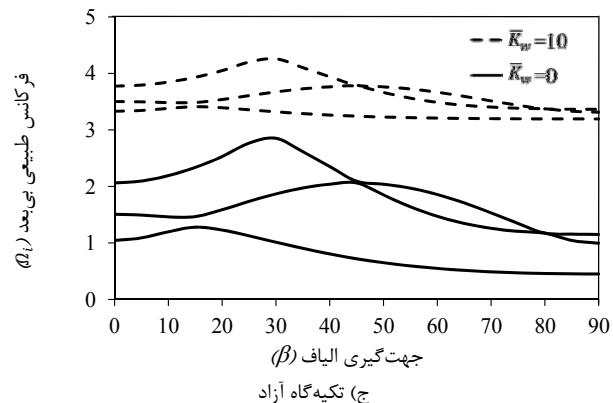
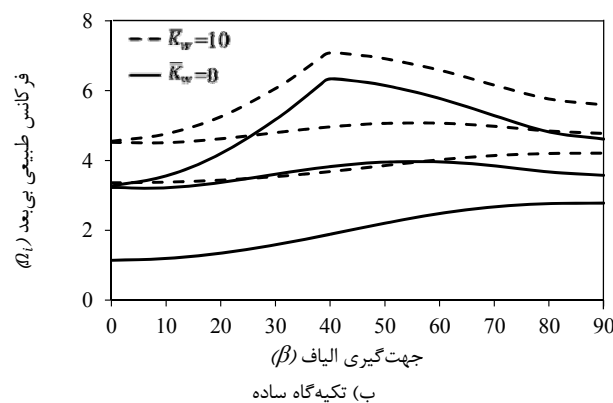
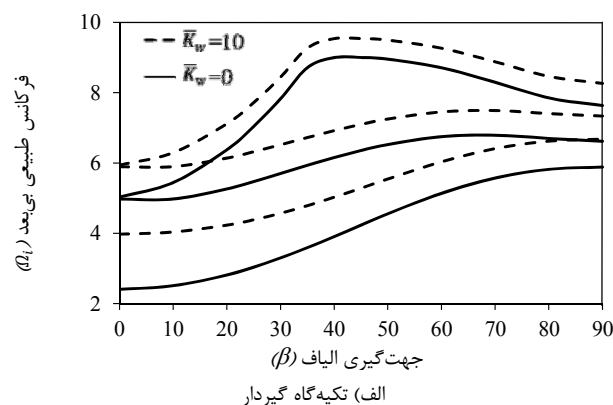
a/b	تکیه‌گاه گیردار			تکیه‌گاه ساده		
	ساتو [۲۱]	محاسبه شده	المان محدود	ساتو [۲۰]	محاسبه شده	المان محدود
۱	۱۴/۶۸۲	۱۴/۶۸۲	۱۴/۶۷۶	۴/۱۹۸	۴/۱۹۸	۴/۲۱۶
۲	۱۰/۴۳۴	۱۰/۴۳۴	۱۰/۵۰۴	۳/۰۵۱	۳/۰۵۱	۳/۰۵۱
۳	۹/۹۶۶	۹/۹۶۶	۱۰/۰۲۲	۲/۹۱۱	۲/۹۱۱	۲/۹۲۸
۴	۹/۸۰۳	۹/۸۰۵	۹/۸۷۶	۲/۸۲۰	۲/۸۲۰	۲/۸۴۴
۵	۹/۷۲۱	۹/۷۳۶	۹/۷۹۹	۲/۷۵۷	۲/۷۵۷	۲/۷۷۸

جدول ۴ مقایسه سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد صفحات چند لایه بیضوی

a/b	تکیه‌گاه گیردار			تکیه‌گاه ساده		
	تلیم و گروسی [۱۴]	محاسبه شده	المان محدود	تلیم و گروسی [۱۴]	محاسبه شده	المان محدود
Ω_1	۱۳/۱۵۹	۱۳/۱۵۹	۱۳/۱۶۶	۶/۳۱۲	۶/۳۱۲	۶/۳۱۲
Ω_2	۲۰/۷۸۱	۲۰/۷۸۱	۲۰/۷۹۷	۱۲/۷۶۹	۱۲/۷۶۹	۱۲/۷۷۰
Ω_3	۳۱/۳۲۶	۳۱/۳۲۸	۳۱/۳۵۸	۲۱/۴۸۲	۲۱/۴۸۲	۲۱/۴۸۲
Ω_4	۳۲/۵۲۷	۳۲/۵۲۷	۳۲/۵۳۹	۲۲/۰۵۴	۲۲/۰۵۴	۲۲/۰۵۴



شکل ۴ تغییرات سه فرکانس طبیعی اول بی بعد صفحات چندلایه‌ای بیضوی برحسب نیروی داخل صفحه‌ای بی بعد



شکل ۳ تغییرات سه فرکانس طبیعی اول بی بعد صفحات کامپوزیتی بیضوی برحسب جهت گیری الیاف

۲. یک روند افزایشی کلی در سه فرکانس طبیعی اول با افزایش پارامتر بستر الاستیک مشاهده می‌گردد. با افزایش زاویه جهت‌گیری الیاف، یک افزایش کلی در فرکانس طبیعی اول برای شرایط مرزی ساده و گیردار ملاحظه می‌شود.

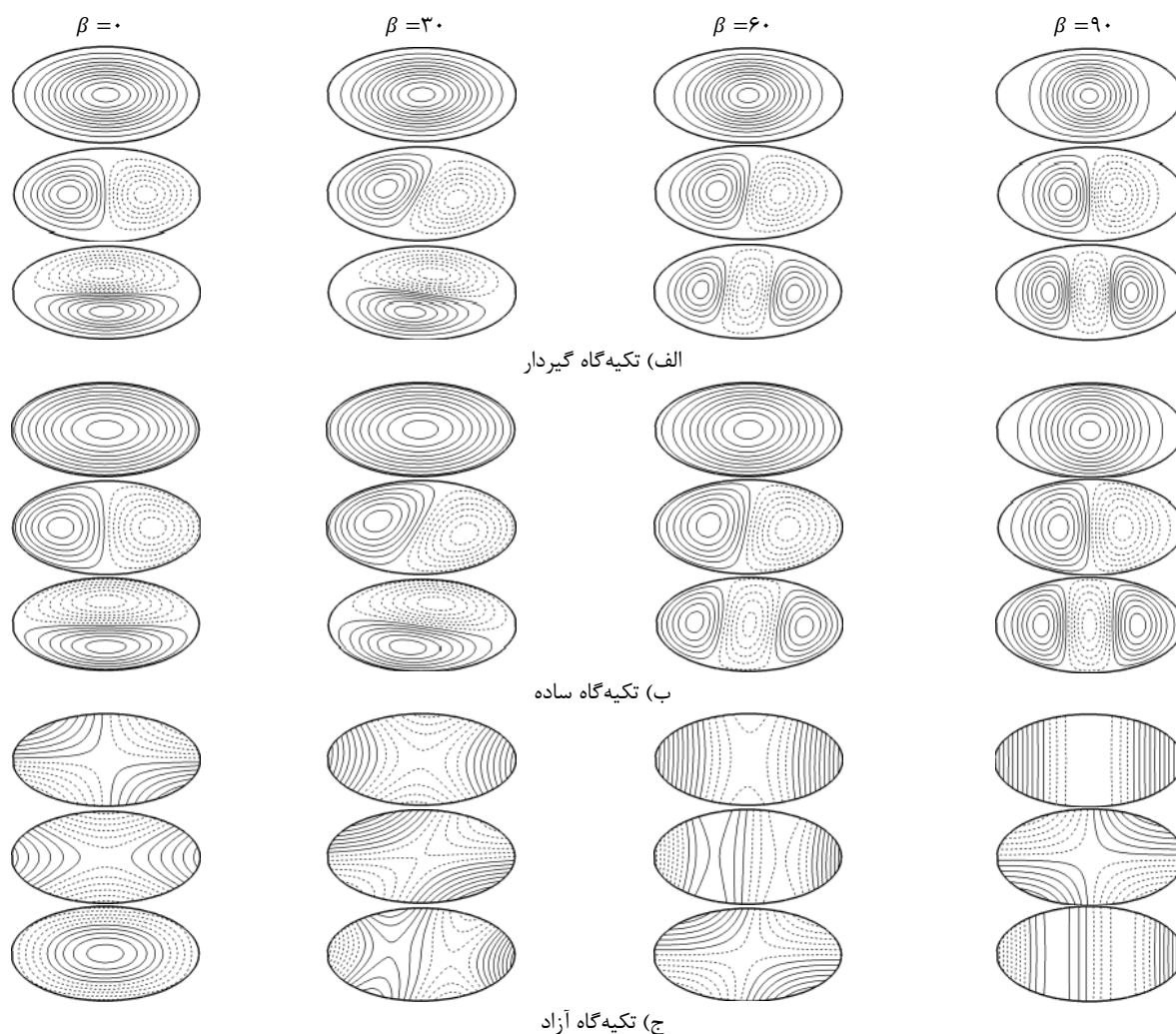
۳. نیروهای داخل صفحه‌ای فشاری موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی شده و آن‌ها را در بار کمانش بحرانی صفر می‌کنند. در حالی که، نیروهای کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شوند که در شکل نیز نشان داده شده است.

۴. با افزایش نسبت خروج از مرکز مستقل از شرایط مرزی، بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. این بیانگر آن حقیقت است که صفحات بیضوی با نسبت خروج از مرکز بالا، راحت‌تر دچار کمانش می‌شوند.

۵- مراجع

- [2] R. G. Rizvanov, R. G. Abdeev, N. L. Matveev, R. G. Ryskulov, A. I. Shenknekt, A. F. Insafut-dinov, Effect of the geometry of the shell/elliptical-bottom contact zone on the stress state of pressure vessels, *Chemical Petroleum Engineering*, Vol. 36, pp. 3-4, 2000.
- [3] V. N. Skopinski, A. B. Smetankin, Selection of rational parameters for reinforced pipe connections in elliptical bottoms of pressure vessels, *Chemical Petroleum Engineering*, Vol. 39, pp.129-33, 2003.
- [4] A. K. Sharma, N. D. Mittal, Review on stress and vibration analysis of composite plates, *Journal of Applied Science*, Vol. 10, No. 23, pp. 3156-3166, 2010.
- [5] U. S. Gupta, A. H. Ansari, Asymmetric vibrations and elastic stability of polar orthotropic circular plates of linearly varying profile, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 2, pp. 231-250, 1998.
- [6] U. S. Gupta, A. H. Ansari, S. Sharma, Buckling and vibration of polar orthotropic circular plate resting on Winkler foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, No. 3-5, pp. 457-476, 2006.
- [7] K. S. Sivakumaran, Free vibration of annular and circular asymmetric composite laminates, *Composite Structure*, Vol. 11, No. 3, pp. 205-226, 1989.
- [8] K. N. Koo, Vibration analysis and critical speeds of polar orthotropic annular disks in rotation, *Composite Structure*, Vol. 76, No. 1-2, pp. 67-72, 2006.

- [1] S. M. Hasheminejad, M. Aghabeigi, Transient sloshing in half-full horizontal elliptical tanks under lateral excitation, *Journal Sound Vibration*, Vol. 330, pp. 3507-25, 2011.



شکل ۵ شکل مدهای ارتعاشی دو بعدی صفحات

- [15] Sh. Hosseini-Hashemi, H. Akhavan, M. Fadaee, Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bonded piezoelectric layers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 57-74, 1390. (In Persian)
- [16] F. Kaviani, H. R. Mirdamadi, Free vibration analysis of laminated composite plate by a novel four-variable refined theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 147-158, 1391. (In Persian)
- [17] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, 3rd Ed., Marcel Dekker Inc., 2004.
- [18] K. Rektorsky, *Variational Methods in Mathematics Science and Engineering*, 2nd Edition, Reidel Dordrecht, 1980.
- [19] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2nd Ed., Boca Raton FL CRC Press, 2007.
- [20] K. Sato, Free flexural vibrations of a simply supported elliptical plate subjected to an in-plane force, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 165-181, 2001.
- [21] K. Sato, Vibration and buckling of a clamped elliptical plate on elastic foundation and under uniform in-plane force, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 49-62, 2002.
- [9] E. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique (Memory on the vibration of an elliptical membrane), *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. 13, pp. 137-203, 1868.
- [10] T. Irie, G. Yamada, Free vibration of an orthotropic elliptical plate with a similar hole, *B. JSME*, Vol. 22, No. 172, pp. 1456-1462, 1979.
- [11] S. Chakraverty, M. Petyt, Natural frequencies for free vibration of nonhomogeneous elliptic and circular plates using two-dimensional orthogonal polynomials, *Application Mathematical Modeling*, Vol. 21, pp. 399-417, 1997.
- [12] C. S. Kim, Natural Frequencies of orthotropic, elliptical and circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 3, pp. 733-745, 2003.
- [13] A. K. Gupta, L. Kumar, Effect of thermal gradient on vibration of non-homogeneous visco-elastic elliptic plate of variable thickness, *Meccanica*, Vol. 44, pp. 507-518, 2009.
- [14] L. G. Nallim, R. O. Grossi, Natural frequencies of symmetrically laminated elliptical and circular plates, *International Journal Mechanical Science*, Vol. 50, pp. 1153-1167, 2008.