به نام خدا

مقدمه‌ای بر

ارتعاشات غیرخطی

فهرست مطالب

مقدمه

ترم‌های غیر خطی در معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم‌های مکـانیکی بـر اثـر عوامـل متفـاوتی مثـل خواص مکانیکی سیستم، خواص مواد و خصوصیات هندسی و یا نوع بارگذاری ایجاد می‌شـود. در توابـع غیـر خطـی، اسـتفاده از اصـل جمـع آثـار مثـل سیسـتم‌هـای خطـی قابـل اسـتفاده نخواهـد بـود. $\exp(-xt), \cos\phi, x^p$ و ... نمونه‌هایی از توابع غیر خطی هستند. در ای سیستم‌هـا روابـط نیـرو، تغییـر مکان و نیروی میرا کننده خطی نخواهد بود. به علت پیچیدگی معادلات غیر خطی، روش واحدی بـرای حل این معادلات وجود ندارد اما به هر حال روش‌های عمومی متعددی برای حل دسـته‌هـای خاصـی از معادلات دیفرانسیل غیر خطی وجود دارد.

مطالعه رفتار سیستم‌های غیر خطی به طور کلی به دو دسته روش‌هـای کیفیتـی و روش‌هـای کمیتـی تقسیم میشود. در روش‌های کیفیتی مسئله پایداری در نزدیکی نقطه تعادل بدون توجه به پاسخ زمـانی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. از طرف دیگر در روش‌های کمیتی بدست آوردن حل تقریبـی بـرای معادلات دیفرانسیل سیستم غیر خطی مورد بحث قرار می‌گیرد. در این میان روش اغتشاش[1] یک روش مهم برای بدست آوردن حل تقریبی معادلات دیفرانسیل غیر خطی در سیستم‌هایی است که میزان غیر خطی بودن معادلات کوچک باشد. حالت ویژه معادلات دیفرانسیل غیر خطی را مـی‌تـوان در ارتعاشـات غیر خطی سیستم‌های مکانیکی مشاهده کرد. در سیستم‌های ارتعاشی غیر خطی، پاسخ متناوب خواهـد بود؛ اگرچه معادلات دیفرانسیل غیر خطی متوانند پاسخ متناوب یا غیر متناوب داشته باشند. در مسائلی که میزان غیر خطی بودن سیستم زیاد باشد، برای یافتن پاسخ زمانی معادلات غیر خطی حرکت، ناچـار باید از روش‌های عددی استفاده کرد. استفاده از روش‌های کمیتی از محاسبات اولیه مسائل فضایی آغلز شده و به نام روش اغتشاش شناخته میشود.

در اینجا بحث را بر ارتعاشات سیستم‌های غیر خطی با یک درجه آزادی متمرکز خـواهیم کـرد. اگرچـه سیستم‌های غیر خطی با درجات آزادی بیشتر از اهمیت بالایی برخـوردار هسـتند، امـا در ایـن مسـائل

1 - Perturbation Method

اصولاً از روش‌های عددی برای حل معادلات غیر خطی و تحلیل رفتار و پاسخ زمانی سیستم استفاده می‌شود.

۱-۱- مثالی از ارتعاش غیر خطی

در ابتدا سیستم ارتعاشی بدون اتلاف انرژی را در نظر می‌گیریم:

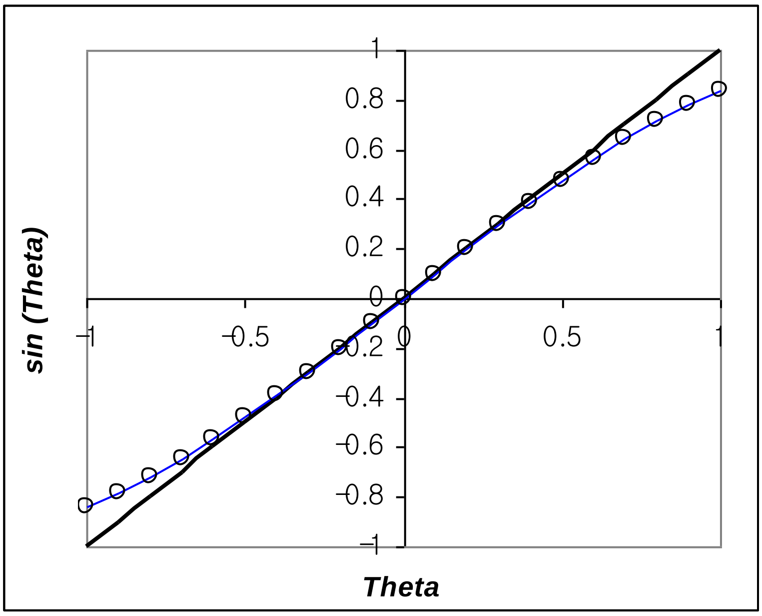
حرکت در میدان گرانشی: حرکت یک پاندول ساده در میدان گرانشی می‌تواند نمونه‌ای از یک سیستم ارتعاشی غیر خطی باشد. معادله دیفرانسیل حرکت پاندول در میدان گرانشی به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \qquad (۱-۱)$$

در تئوری خطی سازی برای زاویه دوران کوچک θ، فرض می‌شود که $\sin\theta\cong\theta$. با این فرض معادله غیر خطی (۱-۱) به معادله یک ارتعاشگر خطی ساده تبدیل میشود:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad (۲-۱)$$

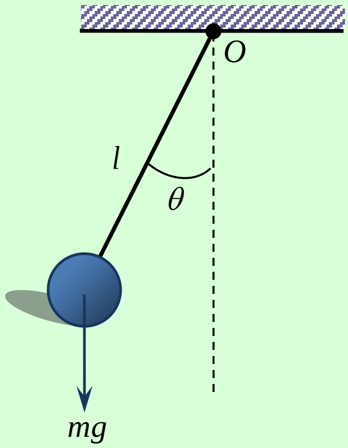
شکل۱-۱ نشان می‌دهد که تقریب فوق در چه محدوده‌ای دارای دقت مطلوب است.



شکل ۱-۱، $\sin\theta$ در مقایسه با تقریب θ

مثال ۱-۱: پاندول ساده:

پاندول ساده شکل ۱-۲ را در نظر بگیریم:



شکل ۱-۲، پاندول ساده

معادله حرکت این پاندول با استفاده از قانون دوم نیوتن به شکل زیر بدست می‌آید:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \qquad (۱-۳)$$

پاسخ معادله فوق را با استفاده از فرض $\sin\theta \cong \theta$ برای خطی سازی معادله دیفرانسیل حرکت می‌توان به صورت زیر حل کرد:

$$\theta(t) = A\sin(\omega_n t + \phi) \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (۱-۴)$$

به راحتی می‌توان زاویه‌ای را برای پاندول تخمین زد که فرض خطی بودن معادله (۱-۳) به خوبی قابل قبول نباشد. در این حالت می‌توان دو جمله اول بسط تیلور تابع سینوس را برای تخمین آن در معادله (۱-۳) نگه داشت. در این صورت معادله حرکت عبارت است از:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0 \qquad (۱-۵)$$

یا

$$\ddot{\theta} + \omega_n{}^2(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0 \qquad (۱-۶)$$

رابطه (۶-۱) نشان دهنده یک نوسانگر با یک فنر غیر خطی به شکل، $\ddot{\theta}+k(\theta)=0$ است که $k(\theta)$ به طور کلی، یک تابع غیر خطی از θ است. هر گاه فنر خطی باشد، این تابع به $k\theta$ تبدیل می‌شود. فنر غیر خطی به دو دسته تقسیم بندی می‌شود:

۱- **فنر نرم**[1]، که در آن شیب منحنی نیروی فنر با افزایش θ، کاهش می‌یابد.

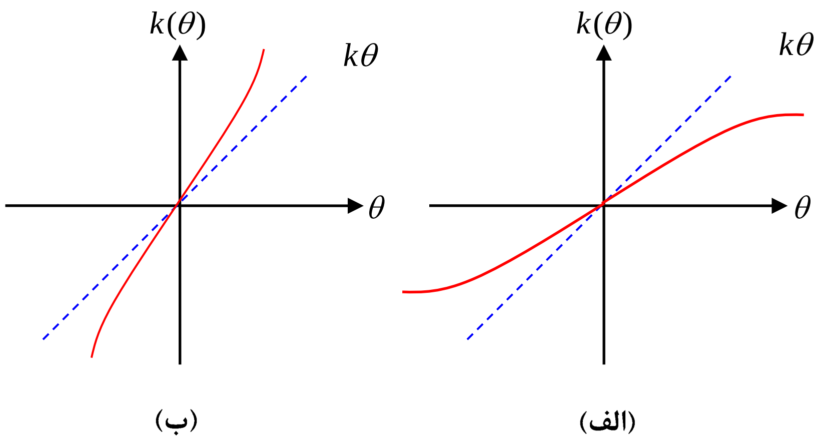
۲- **فنر سخت**[2]، که در آن شیب منحنی نیروی فنر با افزایش θ افزایش می‌یابد.

نمودار تغیرات نیروی فنر بر حسب θ برای دو حالت فوق در شکل ۱-۳ آمده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$\frac{dk}{d\theta}=k \Rightarrow$ فنر خطی است

$\frac{dk}{d\theta}>k \Rightarrow$ فنر سخت است

$\frac{dk}{d\theta}<k \Rightarrow$ فنر نرم است



شکل۱- ۳، الف- فنر نرم، ب- فنر سخت

با این تقسیم‌بندی می‌توان گفت که در فنر سخت، سختی با افزایش θ، افزایش می‌یابد و در فنر نرم، سختی با افزایش θ کاهش می‌یابد و K یک سختی عمومی (شیب) است که نشان می‌دهد که فنر به

1 - Soft Spring
2 - Hard Spring

ازای مقادیر کوچک θ چه رفتاری خواهد داشت. البته باید توجه داشت که ترکیب فنر سخت و نرم نیـز امکان پذیر است.

۱-۲- معادلات غیر خطی در حالت کلی

یک نوسانگر غیر خطی در حالت کلی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود کـه در آن منظـور از x جابجایی است:

$$m\ddot{x}+g(\dot{x})+h(x)=F(t) \tag{۱-۷}$$

در این رابطه، نیروی اینرسی $m\ddot{x}$، نیروی دمپر $-g(\dot{x})$ و نیروی فنر یا نیروی بازگرداننده $-h(x)$ است. همچنین نیروی خارجی یا تحریک خارجی بـا تـابع $F(t)$ مشـخص شـده اسـت. علامـت منفـی بـرای نیروهای فوق از قانون دوم نیوتن بدست آمده است که می‌گوید، مجموع نیروهای وارد به یک جسم برابر نیروی اینرسی آن است؛ یعنی:

$$m\ddot{x}=-g(\dot{x})-h(x)+F(t) \tag{۱-۸}$$

معادله عمومی فوق در دو حالت مهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت اول تنها نیروی فنر غیر خطی بوده و در حالت دوم تنها نیروی دمپر غیر خطی خواهد بود. حالت اول را می‌توان با معادلـه دیفرانسـیل (۱-۹) و حالت دوم را با معادله دیفرانسیل (۱-۱۰) نشان داد.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+h(x)=F(t) \tag{۱-۹}$$

نیروی فنر در این حالت $-h(x)$ بوده که یک تابع غیـر خطـی از x اسـت و نیـروی بازگرداننـده را بـر حسب جابجایی مشخص می‌کند. معادله دیفرانسیل در این حالت بـه معادلـه *Duffing* معـروف اسـت. معادله دیفرانسیل در حالت دمپر غیر خطی نیز به شکل زیر است:

$$m\ddot{x}+g(\dot{x})+kx=F(t) \tag{۱-۱۰}$$

نیروی میرا کننده در اینجا $-g(\dot{x})$ است که تابعی غیر خطی از $\dot{x}$ می‌باشد. باید توجه داشت که رفتـار مطلوب نوسانگر به این مسئله بستگی دارد که آیا نیروی دمپر در راسـتای حرکـت اسـت یـا در خـلاف

جهت سرعت؟ اگر نیروی دمپر در جهت حرکت باشد، نوسانگر را خود *تحریک*[1] می‌نامند؛ زیرا در این حالت نیروی دمپر در جهت سرعت بوده و در نتیجه نقطه تعادل سیستم یک نقطه ناپایدار است. در این حالت نوسانات سیستم بر اثر یک اغتشاش کوچک اولیه، بدون هیچ تحریک خارجی، خودبه‌خود توسعه می‌یابد. حالت خاصی از این نوع ارتعاشات، با معادله‌ای به نام *واندرپول*[2] توصیف می‌شود که در ادامه با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

به طور کلی می‌وان دو گروه از معادلات دیفرانسیل را در نظر گرفت:

۱- **معادلات مستقل**[3]، که زمان به طور صریخ در آن ظاهر نمی‌شود.

۲- **معادلات غیر مستقل**[4]، که زمان به طور صریح در آن ظاهر می‌شود. مثلاً در عبارت تحریک خارجی.

تفاوت یک سیستم مستقل با یک سیستم غیر مستقل در این است که در یک سیستم مستقل، پاسخ دارای پریودی برابر پریود تحریک و یا به طور کلی نسبتی معقول از آن خواهد بود؛ در حالی که پریود یک سیستم مستقل، تنها به پارامترهای موجود در معادله دیفرانسیل سیستم وابسته است.

بعلاوه در یک معادله دیفرانسیل مستقل، زمان t می‌تواند با $t+t_0$ جایگذین شود و پاسخ معادله بدون تغییر باقی بماند. t_0 فاز نامیده می‌شود. این مسئله به این معنی است که، محور زمان می‌تواند به طور اختیاری منتقل شده و مبدا در نقطه‌ای قرار گیرد که سرعت اولیه مسئله صفر شود؛ یعنی $\frac{dx}{dt}=0$. به هر حال، در پاره‌ای مواقع برای سیستم‌های غیر مستقل نیز می‌توان شرایط سرعت اولیه صفر را در نظر گرفت. در این صورت نتایج بدست آمده عمومیت کمتری خواهد داشت، اما بسیار ساده‌تر بوده و در بعضی از موارد مفید است. در ادامه این مبحث در صورت لزوم از فرضیات دیگری نیز استفاده خواهد شد.

1 - Self Excited Oscillator
2 - Vander Pol Equation
3 - Autonomous Equations
4 - Non Autonomous Equations

۱-۳- صفحه حالت[1] (صفحه فاز)

صفحه فاز یک دید کلی در باره سیستم نوسانگر ارائه می‌کند. مزیت صفحه فاز در این است که مسیر[2] حرکت نوسانگر را نشان داده و این مسیر طبیعت نوسان و حرکت را نشان می‌دهد. در روشهای کیفیتی می‌توان مسیر حرکت را مطالعه کرده و طبیعت سیستم را اعم از اینکه آیا سیستم پایدار است، نوسانی است، متناوب است و ... را بررسی کرد. در روش‌های کیفیتی لازم نیست که معادله دیفرانسیل حرکت حل شود؛ اما با این حال می‌توان بسیاری از خواص سیستم را بدون حل معادلات حرکت، مشخص کرد.

فضای پیکربندی یا *صفحه پیکربندی* به عنوان فضایی که معادلات دیفرانسیل سیستم در آن فضا تعیین شده‌اند تعریف می‌شود. یک سیستم با یک درجه آزادی با یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ معین می‌شود؛ که می‌توان این معادله را به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب ۲ متغیر تعمیم یافته تبدیل کرد.

به عنوان مثال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر را نی‌توان به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرد:

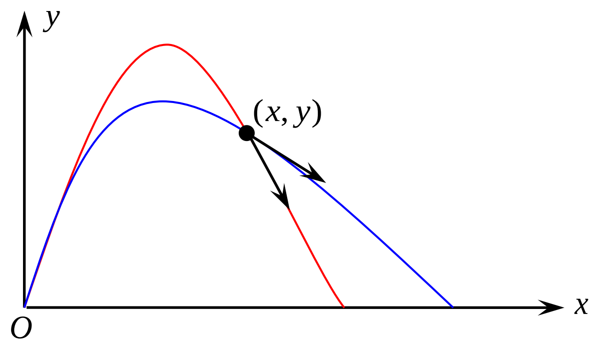
$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0 \qquad (۱-۱۱)$$

$$\dot{x}=y \qquad ; \qquad \dot{y}=-2\xi\omega_n y-\omega_n^2x \qquad (۱-۱۲)$$

در اینجا منظور از صفحه فاز و نمودار مسیر، نمودار سرعت y بر حسب جابجایی x است (توجه کنیم که x و y دو متغیر حالت سیستم و یا ۲ مختصه تعمیم یافته هستند و مسیر حرکت نمودار این متغیرهای حالت بر حسب یکدیگر است که زمان در آن حذف شده باشد). برای اینکه رفتار یک ذره در یک نقطه از فضا بطور کامل مشخص باشد، لازم است که علاوه بر بردار مکان، بردار سرعت ذره نیز معین باشد. شکل ۱-۴ این مسئله را نشان می‌دهد.

یک سیستم با n درجه آزادی دارای $2n$ معادله حالت است که در این صورت صفحه فاز دو بعدی به یک فضای پیکربندی $2n$ بعدی تعمیم می‌یابد. در این صورت $2n$ متغیر حالت موجود، در واقع همان متغیرهایی هستند که در دینامیک لاگرانژی مختصات تعمیم یافته نامیده شده و به عنوان کوچکترین مجموعه از متغیرهای مستقل تعبیر می‌شود که با آن بتوان پیکربندی سیستم را مشخص کرد.

1- Phase Plane
2- Trajectory



شکل ۱-۴، در نقطه نشان داده شده علاوه بر مقدار سرعت(متغیر y) باید بردار سرعت نیز مشخص باشد تا منحنی یکتایی برای مسیر حرکت بدست آید

صفحه فاز را برای سیستم‌های غیر مستقل نمی‌توان بکار برد؛ چرا که میدان برداری در این سیستم‌ها در هر نقطه، با زمان تغیر می‌کند. اما به هر حال سیستم غیر مستقل نیز با افزایش یـک واحـدی ابعـاد آن می‌تواند به سیستم مستقل بدل شود. به عنوان مثال برای یک سیستم غیر مسـتقل یـک درجـه آزادی می‌توان بجای صفحه فاز، یک فضای ۳ بعدی در نظر گرفت که زمان یکی از ابعاد آن است.

مثال ۱-۲: صفحه فاز برای پاندول غیر خطی نامیرا:

معادله مسیرهای پاندول غیر خطی نامیرا را بدست آورده و آن را برای سطوح مختلف انرژی رسم کنید.

حل:

معادله حرکت پاندول به صورت زیر است:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{۱-۱۳}$$

$$\ddot{\theta}+\omega_n^2\sin\theta=0 \tag{۱-۱۴}$$

تعریف می‌کنیم: $x=\theta$ و $y=\dot{x}=\dot{\theta}$. بنابراین:

$$\dot{x}=y \quad ; \quad \dot{y}=-\omega_n^2\sin\theta \tag{۱-۱۵}$$

می‌توان ۲ معادله فوق را با هم ترکیب کرد تا معادله مسیر بدست آید. در این صورت زمان

به صورت ضمنی در معادلات وجود خواهد داشت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_n^2 \sin x}{y} \tag{۱-۱۶}$$

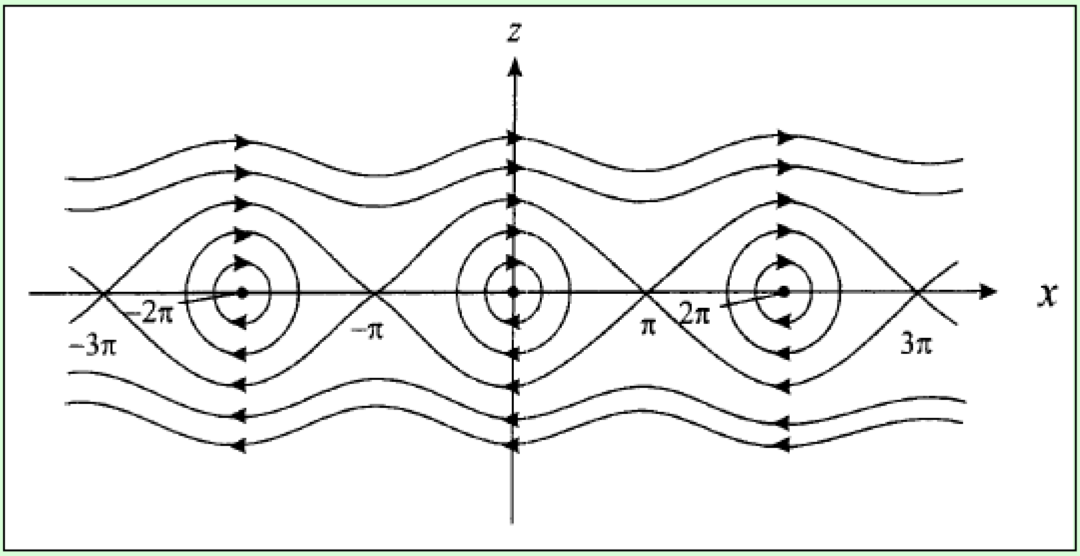
$$y dy = -\omega_n^2 \sin x dx \tag{۱-۱۷}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق و با فرض اینکه سرعت در انتهای سیکل ارتعاش برابر صفر و مکان اولیه نیز x_0 باشد $(x = x_0 \;;\; \dot{x} = 0)$، داریم:

$$y^2 = 2\omega_n^2 (\cos x - \cos x_0) \tag{۱-۱۸}$$

برای ساده‌تر کردن شکل معادله فوق، $z = \dfrac{y}{\omega_n}$ را در نظر می‌گیریم:

$$z^2 = 2(\cos x - \cos x_0) \tag{۱-۱۹}$$



شکل ۱-۵، صفحه فاز برای پاندول غیر خطی نامیرا

شکل ۱-۵ تعدادی از مسیرها را نشان می‌دهد. مسیرهایی که $x = \pm n\pi$ در مرکز آنها قرار دارد نشان دهنده حرکت هارمونیک ساده هستند. چون محور عمودی بر حسب فرکانس طبیعی نرمالیزه شده است، این مسیرها دایره‌ای هستند. در غیز این صورت این مسیرها بیضی شکل بودند. مسیرهایی که در نواحی دورتر قرار گرفته‌اند، نوسانی نیستند، این مسیرها حالت‌هایی را

نشان می‌دهند که پاندول به جای اینکه حول نقطه تعادل خود نوسان کند، مثل یک پره می‌چرخد.

مثال ۱-۳: صفحه فاز برای یک نوسانگر غیر خطی نامیرا:

معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر را در نظر بگیریم:

$$\ddot{\theta}+\omega_n^2(x-2\alpha\theta^3) \tag{۱-۲۰}$$

این معادله در واقع همان معادله نوسانگر خطی است که عبارت غیر خطی بازگرداننده $-2\alpha\omega_n^2\theta^3$ به آن اضافه شده است. با فرض $x=\theta\ ;\ y=\dot{x}=\dot{\theta}$ خواهیم داشت:

$$\dot{x}=y \tag{۱-۲۱}$$

$$\dot{y}=-\omega_n^2(x-2\alpha x^3) \tag{۱-۲۲}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\omega_n^2(x-2\alpha x^3)}{y} \tag{۱-۲۳}$$

$$ydy=-\omega_n^2(x-2\alpha x^3)dx \tag{۱-۲۴}$$

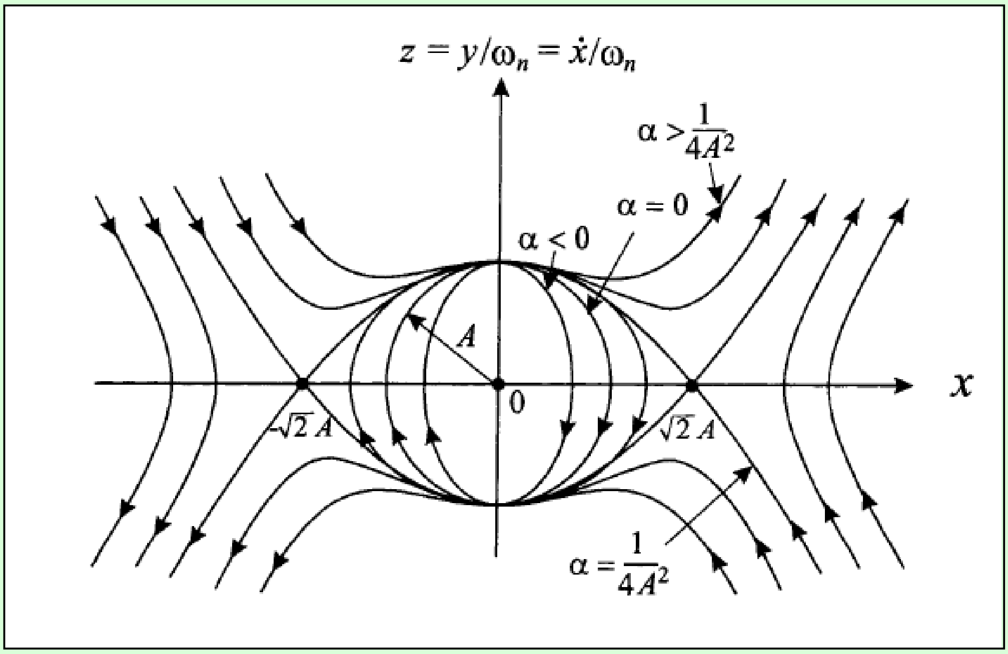
با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه و فرض سرعت صفر در انتهای سیکل نوسان یعنی $\dot{x}=0\ ;\ x=x_0$ و همچنین $z=\frac{y}{\omega_n}$ داریم:

$$z^2+x^2-\alpha x^4=A^2 \quad ; \quad A^2=x_0^2(1-\alpha x_0^2) \tag{۱-۲۵}$$

نقطه فصل مشترک این منحنی‌ها که رفتار ارتعاشی را از رفتار ناپایدار جدا می‌کند، از حل معادله (۱-۲۵) بر حسب α و با $z=0$ بدست می‌آید. در شکل ۱-۶ تعدادی از این مسیرها به ازای مقادیر مختلف α رسم شده‌اند. برای $\alpha<\frac{1}{4A^2}$، حرکت نوسانی است. باید توجه داشت که محور قائم بر حسب ω_n نرمالیزه شده است. دایره‌ای که به ازای $\alpha=0$ رسم شده است، حرکت هارمونیک ساده را نشان می‌دهد. به ازای $\alpha=\frac{1}{4A^2}$، مسیر با یک سهمی مشخص می‌شود که معادله آن به صورت زیر است:

$$\frac{y}{\omega_n} = \pm\left(A - \frac{x^2}{2A}\right) \tag{۱-۲۶}$$

باید توجه داشت که نقطه $(x,y)=(\pm\sqrt{2}A,0)$، یک نقطه تعادل ناپایدار است.



شکل ۱-۶، مسیرها برای نوسانگر غیر خطی به ازای مقادیر مختلف α

دو مثال فوق را می‌توان به یک معادله غیر خطی به شکل زیر تعمیم داد:

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) = 0 \tag{۱-۲۷}$$

با فرض $\dot{x} = y\ ;\ \dot{y} = -f(x,y)$ شیب منحنی مسیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{y} = \phi(x,y) \tag{۱-۲۸}$$

اگر تابع $\phi(x,y)$ به علت تقسیم بر صفر نامعین نباشد، منحنی مسیر در هر نقطه (x,y) از صفحه فاز شبی یکتایی خواهد داشت. اگر $y=0$ و $f(x,y)\neq 0$ ، نقطه روی محور x قرار گرفته است و شیب منحنی مسیر در آن نقطه بینهایت است. این به این معنی است که منحنی مسیر در این نقطه، محور x را با زاویه قائمه قطع می‌کند. اگر $y=0$ و $f(x,0)=0$ ، نقطه (x,y) را نقطه تکین می‌نامند. شیب منحنی مسیر در این نقطه تعریف نشده است. در یک نقطه تعادل $x = const$ و $y=\dot{x}=0$، سرعت

برابر صفر است؛ بنابراین $\dot{y} = -f(x, y) = 0$ و سیستم تخت تاثیر هـیچ نیرویـی نخواهـد بـود. بررسـی پایداری در یک نقطه تکین به عملیات بیشتری نیازمند است. در شکل ۱-۶، نقاطی که در $x = \pm\sqrt{2}A^2$ قرار گرفته‌اند، نقاط تکین ناپایدار هستند.

۱-۴- پایداری در نقطه تعادل

به عنوان مقدمه‌ای از مطالعه پایداری دینامیکی سیستم‌های غیر خطی، یک سیستم غیر خطـی بـا یـک درجه آزادی را مطالعه می‌کنیم. چنین سیستمی را می‌توان با دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{dx}{dt} = g_1(x, y) \tag{۱-۲۸}$$

$$\frac{dy}{dt} = g_2(x, y) \tag{۱-۲۹}$$

که در این روابط g_1 و g_2 توابع غیر خطی از x و y هستند. در این صـورت شـیب منحنـی مسـیر در صفحه فاز به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)} \tag{۱-۳۰}$$

معادله (۱-۳۰) حالت بسیار عمومی‌تری از معادله (۱-۲۸) است. یک نقطه تکین یا تعادل را نقطه‌ای مثل (x_0, y_0) است که شیب منحنی مسیر در آن مقدار نامعین $\frac{0}{0}$ را داراست؛ یعنی:

$$g_1(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0) = 0 \tag{۱-۳۱}$$

۱-۵- صفحه فاز در حالت کلی

صفحه فاز ساده‌ای که در بخش‌های قبل مورد بررسی قرار گرفت و با استفاده از معادلـه (۱-۲۸) بدسـت آمد، برای سیستم‌های مکانیکی معین قابل استفاده است. سیستم‌های پیچیده‌تر یـا واقعـی‌تـر مکـانیکی، بیولوژیکی و هندسی با معادلات دیفرانسیل مرتبه یک عمومی‌تر (۱-۲۸) و (۱-۲۹) مدل می‌شوند. چون

معادلـه (۱-۳۰) یـک معادلـه کلـی اسـت، منحنـی مسـیر حتمـاً محـور X را بـه صـورت قـائم قطـع نمی‌کند. مثالی از یک سیستم یا معادلات دیفرانسیل عمومی می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 2y \\ \dot{y} &= -2x - 2y \end{aligned} \tag{۱-۳۲}$$

ممکن است منحنی فاز محور X را با زاویه‌ای متفاوت با $\frac{\pi}{2}$ قطع کند.

بررسی رفتار منحنی فاز در همسایگی یک نقطه تکین می‌تواند بسیار مفید باشد. سـوالات مشخصـی در رابطه با پایداری سیستم با بررسی این همسایگی پاسخ داده می‌شـود. در ایـن صـورت اسـتفاده از بسـط تیلور[1] توابع g_1 و g_2 حول نقطه تکین مورد نظر کار را بسیار ساده می‌کند. در حالت کلی ممکن اسـت چندین نقطه تکین موجود باشد که هر نقطه باید به صورت جداگانه بررسی شود. می‌توان فرض کرد کـه مثلاً نقطه $(x_0, y_0) = (0,0)$ یک نقطه تکین باشد. در این صورت با انتقال زیر شیب منحنی مسیر تغییر نمی‌کند:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0 \\ y_1 &= y - y_0 \end{aligned} \tag{۱-۳۳}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} \tag{۱-۳۴}$$

در این صورت بسط تیلور توابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = g_1(x,y) = \left.\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)} x + \left.\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)} y + Higher\ order\ terms \tag{۱-۳۵}$$

$$\dot{y} = g_2(x,y) = \left.\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)} x + \left.\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)} y + Higher\ order\ terms \tag{۱-۳۶}$$

باید توجه داشت که توابع g_1 و g_2 در نقطـه تکـین تعریـف شـده و دارای بسـط تیلـور مـی‌باشـند. در همسایگی نقطه تکین، می‌توان از عبارت‌های مرتبه بالاتر در روابط (۱-۳۵) و (۱-۳۶) صرف نظر کرد. در این صورت شکل ماتریسی این معادلات به شکل زیر خواهد بود:

1- Taylor Series

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{۱-۳۷}$$

که d_{ij} به ترتیب نشان دهنده مشتق جزئی اول توابع فوق است.

حل معادلات خطی شده (۱-۳۷) از نظر هندسی مشابه حل معادلات غیر خطی (۱-۲۸) و (۱-۲۹) است.

فرض کنیم که حل معادلات (۱-۳۷) به صورت زیر باشد:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} e^{\lambda t} \tag{۱-۳۸}$$

که در این رابطه X، Y و λ ثابت هستند. با جایگذاری حل (۱-۳۸) در معادله (۱-۳۷) به مسئله مقدار ویژه زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} d_{11}-\lambda & d_{12} \\ d_{21} & d_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۱-۳۹}$$

مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 با مساوی صفر قرار دادن دترمینان زیر بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & d_{12} \\ d_{21} & d_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{۱-۴۰}$$

از معادله فوق خواهیم داشت:

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{۱-۴۱}$$

$$p = d_{11} + d_{22} \quad ; \qquad q = \det(D) = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \tag{۱-۴۲}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{۱-۴۳}$$

اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ و همچنین $\lambda_1 \neq 0$ و $\lambda_2 \neq 0$ پاسخ معادله (۱-۳۷) به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{۱-۴۴}$$

که در این رابطه $\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_1$ و $\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_2$ بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 و C_1 و C_2 مقادیر ثابت هستند. باید توجه داشت که این نتایج مشابه نتایجی است که در هنگام مطالعه معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ توصیف کننده نوسانگر میرا بدست می‌آید. رفتار پاسخ (۱-۴۴) را می‌توان به دو صورت زیر مجزا

کرد:

۱. $p^2-4q<0$: در این حالت حرکت نوسانی است.

۲. $p^2-4q>0$: در این حالت حرکت به صورت نمایی میرا می‌شود.

با توجه به اینکه در عبارت $e^{\lambda t}=e^{(\frac{p}{2}t)}e^{\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}t}$، اگر $p<0$ سیستم پایدار و اگر $P>0$ سیستم ناپایدار است. بنابراین خصوصیات مسیر به مقدار p و رابطه p^2 و $4q$ وابسطه است. این مسئله در حالت‌های زیر قابل توضیح است:

حالت الف) λ_1 و λ_2 حقیقی و متمایز هستند یعنی $p^2>4q$

۱) اگر λ_1 و λ_2 علامت یکسانی داشته و $q>0$، نقطه تعادل یک *گره*[۱] نامیده می‌شود. اگر $0>\lambda_1>\lambda_2$ و $p<0$، کلیه مسیرها در $t\to\infty$ به سمت مبدا میروند و بنابراین مبدا یک گره پایدار نامیده می‌شود (شکل ۱-۷، الف). اگر $0<\lambda_1<\lambda_2$ و $p>0$ کلیه مسیرها در زمان $t\to\infty$ در جهت‌های مختلف حرکت می‌کنند و بنابراین مبدا یک گره ناپایدار خواهد بود (شکل ۱-۷، ب).

۲) اگر λ_1 و λ_2 مختلق العلامت بوده و $q<0$، برای هر علامت p، یکی از حل‌ها به سمت مبدا و دیگری به بینهایت گرایش خواهد داشت. در این صورت مبدا یک *نقطه زینی*[۲] نامیده می‌شود و معادل یک نقطه تعادل ناپایدار[۳] است (شکل ۱-۷، ج).

حالت ب) λ_1 و λ_2 حقیقی بوده و با هم برابر هستند، یعنی $p^2=4q$

مسیر یک خط مستقیم است که از مبدا به عنوان نقطه تعادل عبور می‌کند. اگر $\lambda_{1,2}<0$ باشد، مبدا یک گره پایدار و اگر $\lambda_{1,2}>0$ مبدا یک گره ناپایدار است. شکل ۱-۷، د یک گره پایدار را در این حالت نمایش می‌دهد. در خالت ناپایدار جهت خطوط برعکس خواهد بود.

حالت ج) λ_1 و λ_2 مختلط و مزدوج یکدیگر هستند، یعنی $p^2<4q$

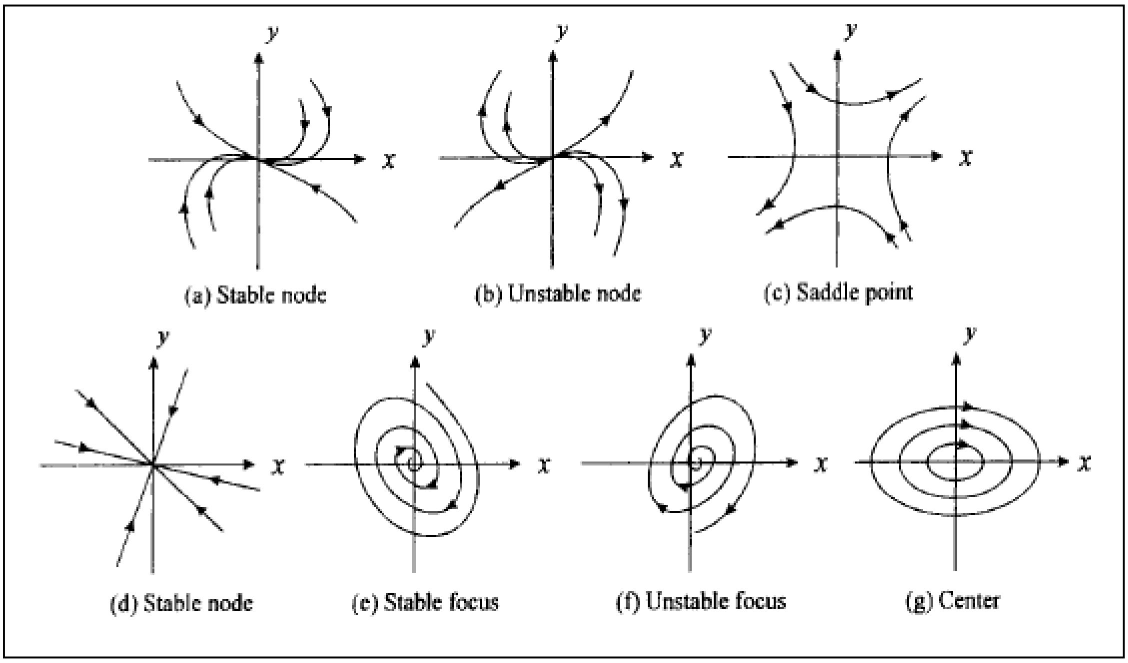
1 - Node
2 - Saddle Point
3 - Unstable Equilibrium

در این حالت مسیرها مارپیچی لگاریتمی بوده و نقطه تعادل، *کانون*[۱] یا *نقطه مارپیچ*[۲] نامیده می‌شود.

۱) اگر $p<0$ و $q>0$، حرکت پایدار بوده و بنابراین کانون پایدار است (شکل ۱-۷،ه).

۲) اگر $p>0$ و $q>0$ حرکت ناپایدار بوده و بنابراین کانون ناپایدار است (شکل ۱-۷، و)

۳) اگر $p=0$ اگر محور قائم نرمالیزه شده باشد، منحنی مسیر به یک دایره تبدیل می‌شود. در غیر این صورت مسیر بیضی خواهد بود. در این صورت نقطه تعادل، *مرکز*[۳] یا *نقطه راس*[۴] نامیده می‌شود. در این حالت حرکت متناوب و بنابراین پایدار است (شکل ۱-۷، ی)



شکل ۱-۷، حالت‌های مختلف منحنی مسیر و بررسی پایداری

دستور العمل فوق در رابطه با پایداری سیستم‌های غیرخطی بر پایه سیستم خطی معادل، ممکن است منجر به رفتار *تعریف شده*[۵] و یا رفتار *بحرانی*[۶] شود. اگر سیستم خطی با افزایش زمان به طور مجانبی پایدار یا ناپایدار باشد، گفته می‌شود که سیستم رفتار تعریف شده دارد. در این صورت خصوصیات

1 - Focus
2 - Spiral Point
3 - Center
4 - Vertex Point
5 - Significant behavior
6 - Critical behavior

پایداری سیستم خطی مشابه خصوصیات پایداری سیستم غیر خطـی خواهـد بـود. از طـرف دیگـر، اگـر سیستم خطی پایدار باشد، سیستم خطی رفتار بحرانـی داشـته و بنـابراین نتـایج بدسـت آمـده در بـاره پایداری آن، الزاماً به سیستم کاملاً غیر خطی قابل تعمـیم نیسـت. در ایـن حالـت بـرای بررسـی دقیـق پایداری سیستم، باید سیستم غیر خطی را بررسی کرد.

۱-۶- روش اغتشاش[۱] یا روش بسط[۲]

روش‌های تقریبی متعددی برای مدل‌سازی و حل معادلات غیر خطی شناخته شده اسـت. یکـی از ایـن روش‌های کمیتی که بر اساس بسط سری‌ها عمل می‌کند، به عنوان روش *اغتشاشـات سیسـتم* شـناخته می‌شود. خصوصیت اصلی این روش در مقایسه با سایر روش‌های تقریبی این است که، در روش اغتشاش، لازم است که میزان غیر خطی بودن سیستم کوچک باشد. روش اغتشاش به عنوان اولین مرحله از آنالیز سیستم غیر خطی مفید بـوده و مـی‌توانـد رفتـار کلـی سیسـتم را مشـخص کنـد. ایـن روش در مـورد سیستم‌هایی که مدل ریاضی آنها به واقعیت نزدیک‌تر است (ساده سازی نشده‌اند) طولانی و طاقت فرسا می‌شود. پس از استفاده از این روش و مشخص شدن رفتار کلی سیستم، استفاده از روش‌های دیگر حـل معادلات غیر خطی نیز می‌تواند مفید باشد. اساس روش اغتشاش برای بدست آوردن یـک حـل متنـاوب برای معادلات غیر خطی به صورت زیر است. برای هر نوسانگر هارمونیک، بیشمار حل متناوب وجود دارد که به مقدار دو ثابت انتگرال‌گیری وابسته است. سوالی که مطرح می‌شـود ایـن اسـت کـه اگـر در یـک سیستم خطی با معادله $\ddot{x}+x=0$ با اضافه کردن عبارت کوچکی به شکل $\varepsilon f(t,x,\dot{x})$ اغتشـاش ایجـاد شود، چه روی می‌دهد؟ ارائه یک پاسخ کلی به این پرسش امکان‌پذیر نیست؛ چراکه پاسخ این پرسش به تابع $\varepsilon f(t,x,\dot{x})$ و میزان کوچکی ε بستگی دارد. به عنوان مثال اگر $\varepsilon f(t,x,\dot{x})=\varepsilon c\dot{x}$ باشـد، مسـیرها مارپیچی لگاریتمی می‌شوند. در این صورت اگـر $c>0$ سیسـتم پایـدار و اگـر $c<0$ سیسـتم ناپایـدار خواهد بود. مقدار ε باید به اندازه کافی کوچک باشد تا بتوانیم مطمـئن شـویم کـه حـل سـری همگـرا

1- Perturbation Method
2 - Expansion Method

خواهد شد. در روش اغتشاش کوشش می‌شود تا مشخص شود که تحت چه شرایطی معادله پاسخ هارمونیک دارد. این مسئله گاهی مسئله پوانکاره[1] نامیده می‌شود.

در ادامه ارتعاش آزاد یک پاندول غیر خطی را بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱-۴: پاندول غیر خطی:

معادله تقریبی حرکت پاندول غیر خطی که در رابطه (۱-۵) داده شده است، به صورت زیر است:

$$\ddot{\theta}+\omega_n{}^2(\theta-\frac{\theta^3}{6})=0 \qquad (۱-۴۵)$$

این معادله را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\theta}+\omega_n^2\theta+\varepsilon\theta^3=0 \qquad (۱-۴۶)$$

که $\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}$ و $\varepsilon=-\frac{\omega_n^2}{6}$ است. معادله (۱-۴۶) معادله غیر اجباری *Duffing* است. در اینجا می‌توانیم فرض کنیم که در صورت کوچک بودن ε میزان غیر خطی بودن معادله کم است. در این صورت حل به روش اغتشاش به صورت زیر داده می‌شود:

$$\theta(t)=\theta_0(t)+\varepsilon\theta_1(t)+\varepsilon^2\theta_2(t)+\ldots \qquad (۱-۴۷)$$

که $\theta_i(t)$ برای هر i باید معین شود. با تقریب دو جمله اول برای $\theta(t)$ و جایگذاری معادله (۱-۴۷) در معادله حرکت (۱-۴۶) خواهیم داشت:

$$(\ddot{\theta}_0+\varepsilon\ddot{\theta}_1)+\omega_n^2(\theta_0+\varepsilon\theta_1)+\varepsilon(\theta_0+\varepsilon\theta_1)^3=0 \qquad (۱-۴۸)$$

با بسط دادن و مرتب کردن رابطه فوق بر حسب توان‌های پارامتر اغتشاش ε، خواهیم داشت:

$$(\ddot{\theta}_0+\omega_n^2\theta_0)+\varepsilon(\ddot{\theta}_1+\omega_n^2\theta_1+\theta_0^3)+\varepsilon^2(3\theta_0^2\theta_1)+\varepsilon^3(3\theta_0\theta_1^2)+\varepsilon^4(\theta_1^3)=0 \qquad (۱-۴۹)$$

از آنجا که ε کوچک فرض شده است، عبارت‌های $\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4,\ldots$ بالاتر از درجه حل فرض شده(درجه ۱) بوده و بنابراین صرف نظر می‌شوند. حلی که به این ترتیب بدست آمده است، بر

1 - Poincare

حسب درجه ε مرتب شده است. در این مرحله مطابق روش زیر هر درجه از حل به طور جداگانه در نظر گرفته شده و ارضاء می‌شود:

$$\varepsilon^0 : \ddot{\theta}_0 + \omega_n^2 \theta_0 = 0 \qquad (۱-۵۰)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{\theta}_1 + \omega_n^2 \theta_1 = -\theta_0^3 \qquad (۱-۵۱)$$

θ_0 به عنوان یک تولید کننده پاسخ برای حل متوالی معادلات فوق شناخته می‌شود. معادله *Duffing* به دو شرط اولیه برای حل نیاز دارد. این شرایط اولیه می‌تواند کاملا عمومی باشد اما در اینجا دو شرط اولیه $\theta(0) = C \ ; \ \dot{\theta}(0) = 0$ را فرض می‌کنیم. اگر سرعت اولیه مخالف صفر باشد، تنها زاویه فاز حرکت تغییر می‌کند اما ویژگی‌های کلی پاسخ برای یک معادله دیفرانسیل مستقل، تغیر نمی‌یابد.

برای سادگی می‌توان قرارداد کرد که شرایط اولیه تنها توسط معادله مرتبه ε^0 ارضاء شود. در این صورت بقیه معادلات باید شرایط اولیه صفر را ارضاء کنند. معادلات فوق باید به صورت متوالی حل شوند. از این رو ابتدا معادله (۱-۵۰) حل شده و θ_0 بدست می‌آید، سپس θ_0 در سمت راست معادله (۱-۵۱) جایگذاری شده و θ_1 بدست می‌آید و این روند تا پایان ادامه می‌یابد. بنابراین:

$$\theta_0(t) = A\sin(\omega_n t + \phi) \qquad (۱-۵۲)$$

برای ارضاء شرایط اولیه لازم است که $A = C$ و $\phi = \frac{\pi}{2}$. بنابراین معادله (۱-۵۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_n^2 \theta_1 = -C^3 \sin^3(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) = -C^3 \left[\frac{3}{4}\sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}\sin 3(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) \right] \qquad (۱-۵۳)$$

حل این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta_1(t) = \frac{3}{8\omega_n} t C^3 \cos(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) - \frac{C^3}{32\omega_n^2} \sin 3(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) \qquad (۱-۵۴)$$

بنابراین حل تقریبی دو جمله‌ای به صورت $\theta(t)=\theta_0(t)+\varepsilon\theta_1(t)$ خواهد بود. با توجه به پاسخ‌ها به سرعت می‌توان مشکلی را که در جمله اول سمت راست معادله (۱-۵۴) رخ داده است مشاهده کرد. این عبارت یک جمله وابسته[1] نامیده می‌شود که به علت ضرب شدن t در کسینوس با گذشت زمان بدون محدودیت افزایش می‌یابد. از طرفی می‌دانیم که حل معادله (۱-۴۶) برای مقادیر کوچک ε متناوب است. مشکل فوق با روشی که بر اساس حذف این عبارت‌ها استوار است و در حد، پاسخ را به صورت متناوب در می‌آورد، حل می‌شود و در ادامه شرح داده می‌شود. این اثر را می‌توان با بسط زیر برای تابع سینوس نشان داد:

$$\sin(\omega_n+\varepsilon)t=\sin\omega_n t\cos\varepsilon t+\cos\omega_n t\sin\varepsilon t=$$
$$(1-\frac{1}{2!}\varepsilon^2t^2+\frac{1}{4!}\varepsilon^4t^4-\ldots)\sin(\omega_n t)+(\varepsilon t-\frac{1t}{3!}\varepsilon^3t^3+\frac{1}{5!}\varepsilon^5t^5-\ldots)\cos(\omega_n t) \quad (۱-۵۵)$$

فرض کنیم که عبارت $\sin(\omega_n+\varepsilon)t$ با دو جمله رابطه (۱-۵۵) تقریب زده شود. تابع سینوس یک تابع هارمونیک است و بنابراین جمله سکولار نباید در بسط آن وجود داشته باشد. این عبارت باید به صورت منطقی حذف شود. مسئله فوق با روش لیندستد[2] تصحیح می‌شود که در بخش بعد شرح داده شده است.

۱-۷- روش لیندستد – پوانکاره

بررسی مثال ۱-۴ با استفاده از روش بسط مستقیم، نشان می‌دهد که پاسخ بدست آمده، حرکت را مقید می‌کند که با مقدار ثابت ω_n نوسان کند. در سیستم‌های ارتعاش خطی، حرکت هارمونیک با فرکانس طبیعی سیستم انجام می‌شود که از خصوصیات سیستم ارتعاشی بوده و مستقل از شرایط اولیه حرکت است. حرکت خطی $(\varepsilon=0)$ هارمونیک بوده و با دوره تناوب $T=\dfrac{2\pi}{\omega_n}$ انجام می‌شود. اما سیستم‌های غیر خطی شبه هارمونیک دارای چندین فرکانس و دوره تناوب هستند که این فرکانس‌ها توابعی از عبارات غیر خطی و شرایط اولیه حرکت سیستم هستند. علت به وجود آمدن نتایج غلط در مثال قبل،

1 - Secular term
2 - Lindstedt's Method

ایجاد عبارت سکولار بخاطر صرف نظر کردن از همین اثرات غیر خطی است. با در نظر گرفتن جملات غیر خطی، پاسخ بدست آمده هارمونیک و با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega}$ خواهد بود که ω فرکانس اساسی مجهول و تابعی از ε و شرایط اولیه است.

روش لیندستد - پوانکاره حول این مسئله بحث می‌کند که فرکانس ω، فرکانس پاسخ، را مانند θ بر حسب پارامتر کوچک ε بسط دهیم. به یاد بیاوریم که در معادلات خطی و غیر خطی، اثر شرایط اولیه حرکت در ثابت‌های انتگرال‌گیری مشخص می‌شود. ما در اینجا انتظار داریم که بسط ω، به صورت تابعی از ثابت‌های انتگرال‌گیری باشد. اما باید توجه داشت که ω در معادله حرکت ظاهر نشده است و تنها ω_n در این معادله وجود دارد. در اولین قدم، تبدیل $\tau = \omega t$ برای ظاهر کردن ω در معادله حرکت استفاده می‌شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$dt = \frac{d\tau}{\omega} \tag{۱-۵۶}$$

$$\frac{d}{dt} = \omega\frac{d}{d\tau} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right) = \omega\frac{d}{d\tau}\left(\omega\frac{d}{d\tau}\right) \quad or \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2}{d\tau^2} \tag{۱-۵۷}$$

که τ در روابط فوق بر حسب رادیان است. مباحث ضروری در رابطه با این روش توسط مینورسکی[1] ارائه شده است. با وارد کردن دو بسط در معادله دفرانسیل مورد نظر، می‌توانیم ضرائب جملات سکولار را در معادلات متوالی بدست آمده حذف کنیم. معادله (۱-۴۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega^2\theta'' + \omega_n^2\theta + \varepsilon\theta^3 = 0 \tag{۱-۵۸}$$

که پریم نشان دهنده مشتق‌گیری نسبت به τ، $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$ و $\varepsilon = -\frac{\omega_n^2}{6}$ است. برای $\varepsilon < 0$ فنر نرم و برای $\varepsilon > 0$ فنر سخت خواهیم داشت. می‌توانیم فرض کنیم که شرایط اولیه حرکت به صورت $\theta(\varepsilon,0) = a_0$ و $\theta'(\varepsilon,0) = 0$ باشد. در سیستم‌های مستقل تنها معادله مرتبه صفر می‌تواند شرایط اولیه را ارضاء کند، یعنی: $\theta_0(\varepsilon,0) = a_0$ و $\theta_0'(\varepsilon,0) = 0$. در این صورت سایر معادلات باقی مانده باید شرایط اولیه صفر را ارضاء کنند، یعنی: $\theta_i(\varepsilon,0) = 0$ و $\theta_i'(\varepsilon,0) = 0$ و $i = 1,2,...$.

1 - **Nonlinear Oscillations,** N, Minorsky, Krieger Publishing Company, 1987, Reprint of original edition of 1962

برای سیستم‌های غیر مستقل، ثابت‌های دلخواه انگرال‌گیری باید مقادیر ویژه‌ای داشته باشند تا حل متناوب بدست اید. به عبارت دیگر کلیه شرایط اولیه منجر به حل متناوب برای سیستم نخواهد شد.

در ادامه ω و θ را بسط داده و تنها تقریب خطی از مرتبه ε^1 را در نظر می‌گیریم:

$$\theta(\varepsilon,\tau)=\theta_0(\tau)+\varepsilon\theta_1(\tau)+\ldots \tag{۵۹-۱}$$

$$\omega=\omega_n+\varepsilon\omega_1+\ldots \tag{۶۰-۱}$$

باید توجه داشت که به ازای $\varepsilon=0$ فرکانس حرکت به $\omega=\omega_n$ تقلیل می‌یابد(سیستم خطی). با جایگذاری بسط‌های فوق در معادله حرکت (۱-۵۸) خواهیم داشت:

$$(\omega_n+\varepsilon\omega_1)^2(\theta_0+\varepsilon\theta_1)''+\omega_n^2(\theta_0+\varepsilon\theta_1)+\varepsilon(\theta_0+\varepsilon\theta_1)^3=0 \tag{۶۱-۱}$$

با بسط معادله فوق و مرتب کردن آن بر حسب توان‌های ε خواهیم داشت:

$$\varepsilon^0:\ \omega_n^2\,\theta_0''+\omega_n^2\theta_0=0 \tag{۶۲-۱}$$

$$\varepsilon^1:\omega_n^2\theta_1''+\omega_n^2\theta_1=-\theta_0^3-2\omega_n\omega_1\theta_0'' \tag{۶۳-۱}$$

از آنجا که تنها از دو جمله اول بسط برای تقریب پاسخ استفاده کردیم، در اینجا نیز تنها دو معادله اول را نگه داشته و از بقیه معادلات صرف نظر می‌کنیم. در اینجا باید توجه داشت که مجموعه معادلات بدست آمده، چگونه به صورت تکراری حل می‌شود. در ابتا معادله (۱-۶۲) برای بدست آمدن $\theta_0(\tau)$ حل شده و سپس با مشتق‌گیری و به توان رساندن و حل بدست آمده و جایگذاری آن در سمت راست معادله (۱-۶۳)، این معادله برای $\theta_1(\tau)$ حل می‌شود. باید توجه داشت که معادلات کلیه معادلات فوق خطی بوده و عبارت‌های غیر خطی به سمت راست معادلات منتقل شده است. معادلات فوق را می‌توان با بکارگیری نظریه معادلات دیفرانسیل خطی به صورت متوالی حل کرد. معادلات (۱-۶۲) و (۱-۶۳) را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\theta_0''+\theta_0=0 \tag{۶۴-۱}$$

$$\theta_1''+\theta_1=-\frac{1}{\omega_n^2}\theta_0^3-2\frac{\omega_1}{\omega_n}\theta_0'' \tag{۶۵-۱}$$

حل معادله اول از مجموعه فوق پس از اعمال شرایط اولیه به صورت زیر $\theta_0(\tau)=a_0\cos(\tau)$ است.

در این صورت معادله دوم به شکل زیر در می‌آید:

$$\theta_1'' + \theta_1 = \left(-\frac{3}{4}\frac{a_0^3}{\omega_n^2} + 2\frac{\omega_1 a_0}{\omega_n} \right)\cos\tau - \frac{a_0^3}{4\omega_n^2}\cos 3\tau \qquad (۶۶-۱)$$

برای حذف جمله سکولار، باید ضریب بار ایجاد کننده تشدید، ضریب $\cos\tau$، مساوی صفر قرار گیرد. این کار منجر به معادله‌ای برای ω_1 خواهد شد:

$$\omega_1 = \frac{3}{8}\frac{a_0^2}{\omega_n} \qquad (۶۷-۱)$$

بنابراین:

$$\theta_1(\tau) = a_1\cos\tau + b_1\sin\tau + \frac{a_0^3}{32\omega_n^2}\cos 3\tau \qquad (۶۸-۱)$$

a_1 و b_1 با اعمال شرایط اولیه صفر برای $\theta_1(\tau)$ بدست می‌آید. نتیجه اعمال این شرایط اولیه به صورت $a_1 = -\frac{a_0^3}{32\omega_n^2}$ و $b_1 = 0$ خواهد بود. بنابراین حل تقریبی برای $\theta(\varepsilon,\tau)$ به صورت زیر است:

$$\theta(\varepsilon,\tau) = a_0\cos\tau - \varepsilon\frac{a_0^3}{32\omega_n^2}(\cos\tau - \cos 3\tau) + O(\varepsilon^2) \qquad (۶۹-۱)$$

با انتقال پاسخ به حوزه زمان خواهیم داشت:

$$\theta(\varepsilon,t) = a_0\cos(\omega t) - \varepsilon\frac{a_0^3}{32\omega_n^2}\big(\cos(\omega t) - \cos 3(\omega t)\big) + O(\varepsilon^2) \qquad (۷۰-۱)$$

$$\omega = \omega_n + \varepsilon\frac{3}{8}\frac{a_0^2}{\omega_n} \qquad (۷۱-۱)$$

معادلات فوق اثرات غیر خطی بودن معادلات را در پاشخ سیستم و فرکانس پاسخ اندازه‌گیری می‌کنند.

۱-۸- چه موقع ω را بسط می‌دهیم؟

در اینجا این ابهام وجود دارد که در چه مسائلی نیاز است که دو پارامتر را بسط دهیم؟ در پاره‌ای از مواقع ما ω را بسط می‌دهیم و در پاره‌ای مواقع نه. به طور کلی می‌توان گفت همواره پارامتری بسط داده می‌شود که مقدار آن مجهول است. به عنوان مثال دامنه پاسخ نوسانگر نامعلوم بوده و بسط داده

می‌شود. برای نوسانگرهای مستقل، دوره تناوب و فرکانس حرکت مجهول بوده و بنابراین ω بسط داده می‌شود.

در بخش بعد یک نوسانگر تحت تحریک خارجی متناوب مورد بررسی قرار می‌گیرد که هدف یافتن پاسخ متناوب با فرکانس تحریک است. بنابراین در چنین مسئله‌ای، لازم نیست که ω بسط داده شود.

یکی از مشکلات مهم در رابطه با معادلات دیفرانسیل غیر خطی این است که این معادلات حل‌های بزرگ و بیشماری دارند. بنابراین با توجه به اینکه تحلیل‌گر به چه اطلاعاتی درباره رفتار نوسانگر غیرخطی نیاز دارد، ممکن است از روش‌های متفاوتی برای حل استفاده شود. در اینجا ما تنها درباره حل متناوب برای نوسانگرهایی با عبارت‌های غیر خطی کوچک بحث می‌کنیم.

۱-۹- ارتعاش اجباری سیستم‌های شبه هارمونیک[1]

معادله تحریک شده *Duffing* را در نظر بگیریم:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \varepsilon\left[-\omega_n^2\left(\alpha x + \beta x^3\right) + F\cos\Omega t\right] \quad , \quad \varepsilon << 1 \qquad (۷۲-۱)$$

که α و β ثابت‌های اختیاری، $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m}$ و $\varepsilon F\cos\Omega t$ تحریک هارمونیک است. در این مسئله تحریک هارمونیک دامنه‌ای کوچک دارد. بنابراین انتظار می‌رود که پاسخ تقریباً هارمونیک یا شبه هارمونیک باشد. بنابراین این مسئله اهمیت می‌یابد که تحت چه شرایطی پاسخ $x(t)$ متناوب و با دوره تناوب $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ خواهد بود. بنابراین در اینجا لازم نیست که فرکانس پاسخ را بسط دهیم. این مسئله با استفاده از روش اغتشاش و تغیر متغیر زیر قابل حل است:

$$\Omega t = \tau + \phi \qquad (۷۳-۱)$$

$$\frac{d}{dt} = \Omega\frac{d}{d\tau} \qquad (۷۴-۱)$$

که τ متغیر زمانی جدید و ϕ زاویه فاز است. اثر تبدیلات فوق در مقیاس زمان، دوره تناوب 2π

1 - Quasi – Harmonic Systems

برای حرکت است. با تبدیلات فوق معادله (۱-۷۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\Omega^2 x'' + \omega_n^2 x = \varepsilon\left[-\omega_n^2\left(\alpha x + \beta x^3\right) + F\cos(\tau+\phi)\right] \quad , \quad \varepsilon << 1 \tag{۱-۷۵}$$

که پریم نشان دهنده مشتق‌گیری نسبت به τ است. به یاد آوریم که جملات سکولار باید حذف شده و پاسخ باید متناوب باشد، یعنی: $x(\tau)=x(\tau+2\pi)$. همچنین فرض کنیم که $x(0)=C_0$ و $x'(0)=0$. مقدار C_0 اختیاری نبوده و بر حسب سایر پارامترهای سیستم محاسبه می‌شود. روش اغتشاش بر پایه بسط $x(\tau)$ و ϕ به صورت زیر است:

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{۱-۷۶}$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \ldots \tag{۱-۷۷}$$

که به ازای هر i، $x_i(\tau+2\pi)=x_i(\tau)$، $x_i'(0)=0$ و $x_0(0)=C_0$. با جایگذاری بسط‌های فوق در معادله (۱-۷۵) و برابر قرار دادن توان‌های یکسان ε، خواهیم داشت:

$$\Omega^2 x_0'' + \omega_n^2 x_0 = 0 \tag{۱-۷۸}$$

$$\Omega^2 x_1'' + \omega_n^2 x_1 = -\omega_n^2\left(\alpha x_0 + \beta x_0^3\right) + F\cos(\tau+\phi_0) \tag{۱-۷۹}$$

$$\Omega^2 x_2'' + \omega_n^2 x_2 = -\omega_n^2\left(\alpha x_1 + 3\beta x_0^2 x_1\right) + F\cos(\tau+\phi_1) \tag{۱-۸۰}$$

.

.

.

معادلات فوق باید به صورت متوالی برای محاسبه هر $x_i(\tau)$ و با در نظر گرفتن شرایط متناوب بودن پاسخ و همچنین شرایط اولیه حل شود. پاسخ معادله (۱-۷۸) به صورت زیر است:

$$x_0(\tau) = C_0\cos\left(\frac{\omega_n}{\Omega}\tau\right) \tag{۱-۸۱}$$

که C_0 دامنه ثابت پاسخ است. شرط دوره تناوب 2π روی τ باید در جواب فوق برقرار باشد؛ بنابراین لازم است که $\Omega=\omega_n$. با جایگذاری این نتایج در معادلات (۱-۷۹) و (۱-۸۰) خواهیم داشت:

$$x_1'' + x_1 = -\left(\alpha C_0\cos\tau + \beta C_0^3\cos^3\tau\right) + \frac{F}{\omega_n^2}\cos(\tau+\phi_0) \tag{۱-۸۲}$$

این رابطه با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^3\tau = (3\cos\tau - \cos 3\tau)/4$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$x_1'' + x_1 = -\alpha C_0 \cos\tau - \beta C_0^3 \frac{1}{4}(3\cos\tau + \cos 3\tau) + \frac{F}{\omega_n^2}(\cos\tau\cos\phi_0 - \sin\tau\sin\phi_0)$$
$$= -\frac{F}{\omega_n^2}\sin\phi_0 \sin\tau - (\alpha C_0 + \frac{3}{4}\beta C_0^3 - \frac{F}{\omega_n^2}\cos\phi_0)\cos\tau - \frac{1}{4}\beta C_0^3 \cos 3\tau \quad (۸۳-۱)$$

برای جلوگیری از به وجود آمدن عبارت‌های سکولار و ایجاد پاسخ متناوب با شرایط تناوب گفته شده لازم است که ضرائب $\sin\tau$ و $\cos\tau$ برابر صفر باشد. با توجه به روابط فوق مشخص است که در مجموعه از روابط زیر این شرایط را ارضاء می‌کند: $\phi_0 = 0$ و $\phi_0 = \pi$.

$$\phi_0 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha C_0 + \frac{3}{4}\beta C_0^3 - \frac{F}{\omega_n^2} = 0 \quad (۸۴-۱)$$

$$\phi_0 = \pi \;\Rightarrow\; \alpha C_0 + \frac{3}{4}\beta C_0^3 + \frac{F}{\omega_n^2} = 0 \quad (۸۵-۱)$$

که از آنجا که α، β و F همگی معلوم هستند، C_0 از روابط فوق تعیین می‌شود. معادله (۱-۸۵) اطلاعات بیشتری نسبت به معادله (۱-۸۴) ارائه نمی‌کند. رابطه (۱-۸۵) تنها مشخص می‌کند که اگر $\phi_0 = \pi$ پاسخ نسبت به نیروی تحریک ۱۸۰ درجه اختلاف فاز خواهد داشت. این مسئله مثل این است که پاسخ همفاز و با دامنه منفی باشد. در اینجا از معادله (۱-۸۴) برای بدست آوردن $x_1(\tau)$ استفاده می‌کنیم:

$$x_1(\tau) = C_1 \cos\tau + \frac{1}{32}\beta C_0^3 \cos 3\tau \quad (۸۶-۱)$$

همانطور که مقدار C_0 بر اساس شرایط لازم برای متناوب بودن $x_1(\tau)$ بدست آمد، مقدار C_1 نیز بر اساس شرایط لازم برای متناوب بودن $x_2(\tau)$ بدست می‌آید. برای این کار معادله (۱-۸۶) در معادله (۱-۸۰) جایگذاری شده و پس از به کار بردن اتحادهای مثلثاتی لازم و ساده کردن عبارت حاصل، عبارت‌های معادله بدست آمده از نظر تولید جملات سکولار بررسی شده و از روابط بدست آمده مقدار C_1 محاسبه می‌شود. فرض کنیم که تنها $x_1(\tau)$ را نگه داشته و از بقیه درجات ε صرف نظر کنیم:

$$x(\tau) \cong x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) = C_0 \cos\tau + \varepsilon(C_1 \cos\tau + \frac{1}{32}\beta C_0^3 \cos 3\tau) \quad (۸۷-۱)$$

که در این رابطه $\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 = 0$ است که $\phi_1 = 0$ از شرایط تناوب در حل معادله مرتبه ε^2 بدست آمده است. از آنجا که میرایی در سیستم وجود ندارد، کلیه زوایای فاز برابر صفر می‌شود؛ با یادآوری حرکت سیستم‌های ارتعاشی خطی بدون میرایی می‌توانیم از ابتدا از بسط دادن ϕ صرف نظر کنیم.

با در نظر گرفتن رابطه

$$\omega_0^2 \equiv (1+\varepsilon\alpha)\omega_n^2 \tag{۱-۸۸}$$

معادله (۱-۷۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon\omega_n^2 \beta x^3 = \varepsilon F \cos\Omega t \;\;,\;\; \varepsilon << 1 \tag{۱-۸۹}$$

با حل معادله (۱-۸۸) برای بدست آوردن α و جایگذاری آن در رابطه (۱-۸۴) و حل معادله حاصل برای ω_n^2، خواهیم داشت:

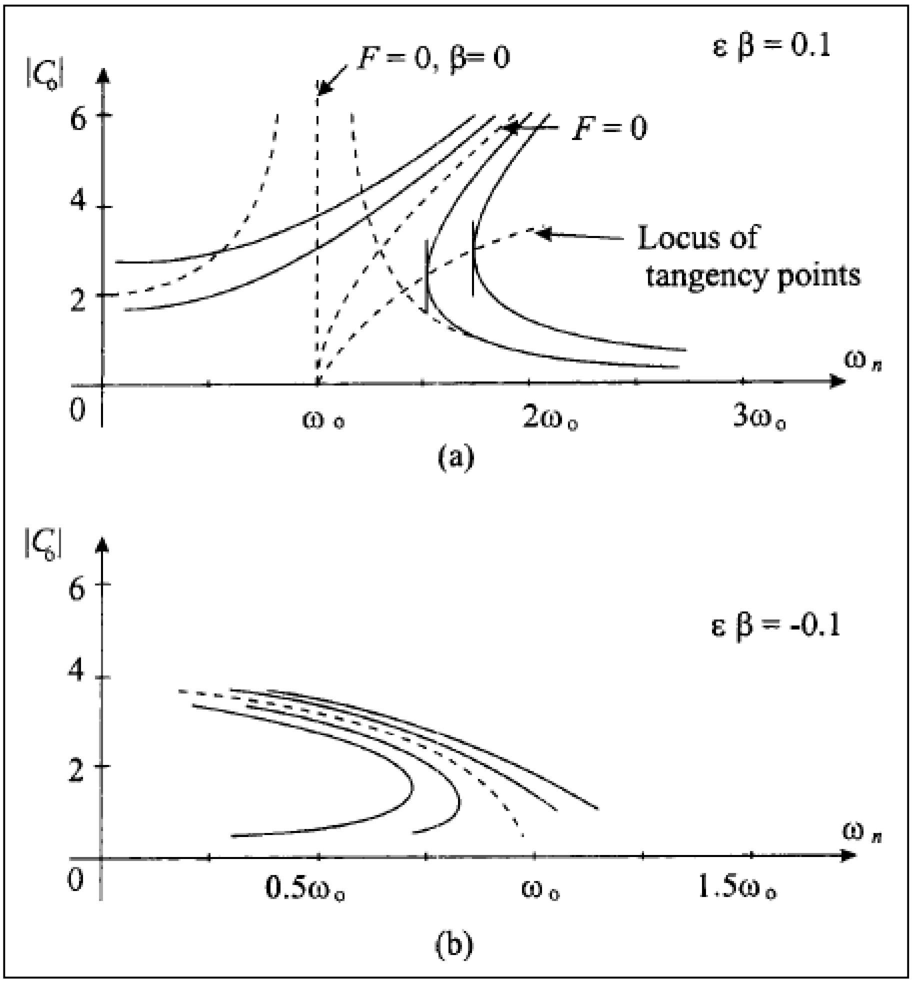
$$\omega_n^2 = \omega_0^2\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon\beta C_0^2\right) - \varepsilon\frac{F}{C_0} \tag{۱-۹۰}$$

که در بدست آوردن معادله فوق از تقریب زیر استفاده شده است:

$$\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon\beta C_0^2\right)^{-1} \cong \left(1+\frac{3}{4}\varepsilon\beta C_0^2\right) \tag{۱-۹۱}$$

که این رابطه بر اساس بسط تیلور $1/(1+x) \cong 1-x$ برای xهای کوچک بدست آمده و جمله مرتبه ε^2 حذف شده است. از معادله (۱-۹۰) می‌توان $|C_0|$ را بر حسب ω_n رسم کرد که ω_n با واحد ω_0 اندازه‌گیری می‌شود. در این نمودار $\varepsilon\beta$ معلوم بوده و εF به عنوان یک پارامتر است. این نمودارها در شکل ۱-۸ برای $\varepsilon\beta = \pm.01$ نشان داده شده است. باید توجه داشت که نمودارها برای هر مورد به صورت جفت و در دو طرف منحنی مربوط به $F = 0$ قرار گرفته‌اند.

با استفاده از این منحنی‌ها می‌توان کلیه اطلاعات راجع به سیستم را از هم تمیز داد. علامت $\varepsilon\beta$ تعیین می‌کند که آیا منحنی‌ها به سمت راست خم می‌شوند، $\varepsilon\beta > 0$ برای فنر سخت شونده، و یا به سمت چپ خم می‌شوند، $\varepsilon\beta < 0$ برای فنر نرم شونده. اما در مورد حالت خطی، برای نوسانگرهای بدون میرایی، دامنه حرکت در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم به سرعت رشد می‌کند.



شکل ۱-۸، منحنی‌های دامنه برای معادله *Duffing* **برای دو مقدار** $\varepsilon\beta$**، در شکل الف منحنی نقطه چین برای** $\beta = 0$ **حالت مسئله خطی را نشان می‌دهد**

خطی که به عنوان مکان هندسی نقاط تلاقی نامگذاری شده است را در نظر بگیریم. خط عمودی که در سمت است این خط قرار دارد، منحنی‌ها را در دو نقطه در یک شاخه و در یک نقطه در شاخه مقابل تقسیم می‌کند. هر چهار راه نشان دهنده یک ریشه حقیقی است و همچنین خط عمودی نشان می‌دهد که سه دامنه امکان‌پذیر متناظر با دامنه نیروی تحریک وجود دارد. خط عمودی سمت چپ تنها یک ریشه حقیقی و دو ریشه موهومی دارد.

۱-۱۰- پاندول در ارتعاش اجباری

مسائل غیرخطی یک وابستگی را بین ارتعاش آزاد، ارتعاش اجباری و شرایط اولیه ایجاد می‌کند. ثابت‌های اختیاری انتگرال‌گیری تنها با شرایط اولیه حرکت متناوب تعیین نمی‌شوند، بلکه آنها توابعی از دوره تناوب تحریک نیز هستند.

یک پاندول غیر خطی که با معادله زیر توصیف می‌شود را در نظر بگیریم:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin\theta = F\cos\omega t \tag{۹۲-۱}$$

یک معادله غیرخطی تقریبی که بیانگر معادله غیرخطی کامل فوق باشد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = F\cos\omega t \tag{۹۳-۱}$$

معادله فوق را در حالت کلی در نظر بگیریم. برای این کار در ابتدا تبدیل $\tau = \omega t$ را در نظر بگیریم. در این صورت معادله حرکت غیر خطی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\omega^2\theta'' + \omega_n^2\theta - \frac{1}{6}\omega_n^2\theta^3 = \Gamma\omega^2\cos\tau \tag{۹۴-۱}$$

و یا

$$\theta'' + \Omega^2\theta - \frac{1}{6}\Omega^2\theta^3 = \Gamma\cos\tau \tag{۹۵-۱}$$

که در این روابط $\Gamma\omega^2 = F$ و $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ است. در حالت کلی با تعریف $\varepsilon = -\dfrac{\Omega^2}{6}$ و استفاده از روش اغتشاش خواهیم داشت:

$$\theta'' + \Omega^2\theta + \varepsilon\theta^3 = \Gamma\cos\tau \tag{۹۶-۱}$$

رابطه فوق به ازای $\varepsilon = 0$ به معادله خطی تبدیل می‌شود. در این حالت ما به دنبال حلی برای این معادله با دوره تناوبی مشابه دوره تناوب تحریک هستیم که در واقع دوره تناوب 2π داشته باشد. بسط رابطه فوق با استفاده از روش اغتشاش به صورت تابعی از ε و τ خواهد بود:

$$\theta(\varepsilon,\tau) \equiv \theta_0(\tau) + \varepsilon\theta_1(\tau) + \varepsilon^2\theta_2(\tau) + \ldots \tag{۹۷-۱}$$

که شرایط تناوب $\theta_i(\tau+2\pi) = \theta_i(\tau),\ i = 1,2,3,\ldots$ ترم‌های سکولار را حذف خواهد کرد. اگر رویکرد فوق در مسائل عملی استفاده شود، لازم است که $\varepsilon << 1$ و در نتیجه $\theta_0(\tau) << \varepsilon\theta_1(\tau) << \varepsilon^2\theta_2(\tau) << \ldots$ باشد. در این صورت می‌توانیم تنها ترم‌های ε^2 یا ε را نگه داشته و از بقیه با دقت مطلوبی صرف نظر کنیم. آنچه در اینجا مورد بحث قرار گرفت، بدون توجه به خصوصیات نیروی تحریک است. باید توجه داشت که در این مسئله به بسط دادن ω نیاز نیست چرا که فرکانس حرکت ارتعاشی از قبل مشخص است. با جایگذاری $\theta(\varepsilon,\tau)$ و مشتقات آن در رابطه (۱-۹۶) و ساده سازی آن خواهیم داشت:

$$\left(\theta_0'' + \varepsilon\theta_1'' + \varepsilon^2\theta_2'' + \ldots\right) + \Omega^2\left(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots\right) + \varepsilon\left(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots\right)^3 = \Gamma\cos\tau \tag{۹۸-۱}$$

باید توجه داشت که وقتی عبارت آخر به توان ۳ می‌رسد، عباراتی با ضریب ε^3 و ε^4 و ... حاصل می‌شود. در این صورت با صرف نظر از این عبارت‌ها و نگه داشتن عبارات از مرتبه ۲ و پایین‌تر، خواهیم داشت:

$$\varepsilon\left(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots\right)^3 \cong \varepsilon\left(\theta_0^3 + 3\theta_0^2\varepsilon\theta_1\right) \tag{۹۹-۱}$$

که در این روابط θ از ε مستقل بوده و بنابراین روابط فوق باید برای هر مقدار $\varepsilon << 1$ برقرار باشد. معادله دیفرانسیل بسط داده شده فوق با برابر قرار دادن ضرائب توان‌های مشابه ε به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌شود که باید به صورت متوالی حل شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &: \quad \theta_0'' + \Omega^2\theta_0 = \Gamma\cos\tau \\ \varepsilon^1 &: \quad \theta_1'' + \Omega^2\theta_1 = -\theta_0^3 \\ \varepsilon^2 &: \quad \theta_2'' + \Omega^2\theta_2 = -3\theta_0^2\theta_1 \end{aligned} \tag{۱۰۰-۱}$$

که در این بسط از حل تقریبی (۱-۹۷) و با خطای $O(\varepsilon^3)$ استفاده شده است. به راحتی می‌توان مشاهده کرد که مزیت اصلی بسط فوق، تبدیل معادله دیفرانسیل غیر خطی حرکت، به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل خطیست که باید به صورت متوالی حل شوند. معادلات خطی فوق، بجز عبارت ورودی، کاملاً مشابه هستند و می‌توان انها را با استفاده از انتگرال کانولوشن حل کرد. در طول اجرای

مراحل فوق برای حل مجموعه معادلات دیفرانسیل خطی، درک خود از سیستم فیزیکی را نیز در نظر می‌گیریم تا بتوانیم عبارت‌هایی را که از حل معادلات بدست آمده و با درک ما از سیستم واقعی همخوانی ندارد را کنار بگذاریم. این مسئله با اجرای مراحل حل شفاف‌تر خواهد شد.

معادلات دیفرانسیل (۱-۱۰۰) را می‌توان به صورت متوالی حل کرد. حل معادله مرتبه ε^0 به شکل زیر است:

$$\theta_{0h}(\tau) = a_0 \cos\Omega\tau + b_0 \sin\Omega\tau \qquad (۱-۱۰۱)$$

که در این رابطه h مشخص کننده حل همگن معادله دیفرانسیل و a_0 و b_0 ثابت‌های اختیاری هستند که در ادامه با استفاده از شرایط تناوب محاسبه می‌شوند. حل خصوصی معادله مرتبه ε^0 نیز به صورت زیر است:

$$\theta_{0p}(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\cos\tau \qquad (۱-۱۰۲)$$

پاسخ کلی این معادله دیفرانسیل مجموع پاسخ‌های همگن و خصوصی است. باید توجه داشت که پاسخ خصوصی در نزدیکی شرایط رزونانس، $\Omega = 1$، نامعتبر است. این حالت را باید به طور جداگانه حل کرد. همچنین در اینجا برای اختصار تنها پاسخ‌های دارای دوره تناوبی مشابه دوره تناوب تحریک، $T = \frac{2\pi}{1}$ را در نظر می‌گیریم. سایر پاسخ‌ها در بخش بعد آزمایش خواهند شد.

اگر بخواهیم که پاسخ دوره تناوب 2π،برابر دوره تناوب تحریک، داشته باشد، ثابت‌های a_0 و b_0 باید مساوی صفر باشند. در این صورت $\theta_0(\tau) = \theta_{0p}(\tau)$. این تابع به توان ۳ می‌رسد و به عنوان تابع تحریک در معادله دوم از مجموعه معادلات (۱-۱۰۰) قرار گرفته و جهت یافتن $\theta_1(\tau)$ استفاده می‌شود.

$$\theta_0^3 = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\cos\tau\right)^3 = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\right)^3\left(\frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau\right) \qquad (۱-۱۰۳)$$

بسط $\cos^3\tau$ بسیار حائز اهمیت است، چرا که کمک می‌کند تا انواع عبارت‌های هارمونیک موجود در آن شناخته شود. مجدداً با صرف نظر از پاسخ همگن حل خصوصی معادله دوم عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&\theta_{1p}(\tau) = a_1 \cos\tau + b_1 \cos 3\tau \\
&a_1 = \frac{3\Gamma^3}{4\left(\Omega^2 - 1\right)^4} \\
&b_1 = \frac{\Gamma^3}{4\left(\Omega^2 - 1\right)\left(\Omega^2 - 9\right)}
\end{aligned} \tag{۱۰۴-۱}
$$

برای حل معادله بعدی این مجموعه، لازم است عبارت $3\theta_0^2\theta_1$ محاسبه شود کـه ایـن مرحلـه در اینجـا صرف نظر شده است. حل خلاصه شده با دقتی از مرتبه ε به صورت زیر است:

$$\theta(\varepsilon,\tau) \cong \theta_0(\tau) + \varepsilon\theta_1(\tau) + O(\varepsilon^2) \tag{۱۰۵-۱}$$

که عبارت‌های مربوط به $\theta_0(\tau)$ و $\theta_1(\tau)$ بدست آمده و همچنین $\varepsilon = -\dfrac{\Omega^2}{6}$. در این صورت مـی‌تـوان متغیرها را به صورت فیزیکی آنها برگرداند.

۱-۱۱- نیروی تحریک در حالت عمومی

در اینجا احتمال وجود یک نیروی تحریک را در حالت کلی $f(t)$ بررسی می‌کنیم. معادلـه دیفرانسـیل غیر خطی را در حالت کلی زیر در نظر بگیریم:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega_n^2\theta + \varepsilon g(\theta,\dot{\theta}) = f(t) \tag{۱۰۶-۱}$$

پاسخ بسط یافته این معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$\theta(\varepsilon,t) \equiv \theta_0(t) + \varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t) + \dots \tag{۱۰۷-۱}$$

که در این رابطه $\theta_0(t)$ معادله دیفرانسیل خطی را ارضاء می‌کند. قبل از جایگذاری بسط فوق در معادله دیفرانسیل (۱-۱۰۶)، تابع غیر خطی $g(\theta,\dot{\theta})$ را حول حل خطی $\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)$ بسط می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
&g(\theta,\dot{\theta}) = g(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots, \dot{\theta}_0 + \varepsilon\dot{\theta}_1 + \varepsilon^2\dot{\theta}_2 + \dots) = \\
&g(\theta_0,\dot{\theta}_0) + \left(\varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots\right)\frac{\partial}{\partial\theta} g\left(\varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots\right) \\
&+ \left(\varepsilon\dot{\theta}_1 + \varepsilon^2\dot{\theta}_2 + \dots\right)\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}} g\left(\theta,\dot{\theta}\right) + \textit{higher order terms}
\end{aligned} \tag{۱۰۸-۱}
$$

با نگه داشتن ترم‌های مرتبه ε^2 و برابر قرار دادن عبارت‌های با توان یکسان برای ε، معادلات متوالی

زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0:\quad \ddot{\theta}_0+\alpha\dot{\theta}_0+\omega_n^2\theta_0=f(t)\\
&\varepsilon^1:\quad \ddot{\theta}_1+\alpha\dot{\theta}_1+\omega_n^2\theta_1=-g\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)\\
&\varepsilon^2:\quad \ddot{\theta}_2+\alpha\dot{\theta}_2+\omega_n^2\theta_2=-\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta}g\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)-\dot{\theta}_1\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}g\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)
\end{aligned}\qquad (۱-۱۰۹)$$

باید توجه داشت که حل تحلیلی معادلات متوالی فوق، برای بیش از دو یا سه ترم در عبارت بسط یافته فوق، بسیار دشوار خواهد شد. پاسخ θ_0 و θ_1 به صورت متوالی و با استفاده از انتگرال کانولوشن بدست می‌آید. روش حل برای هر تابع غیر خطی $g(\theta,\dot{\theta})$ در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\theta_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)h(\tau)d\tau\\
&\theta_1(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}g\left[\theta_0(t-\tau),\dot{\theta}_0(t-\tau)\right]h(\tau)d\tau
\end{aligned}\qquad (۱-۱۱۰)$$

و سپس $\theta(t)=\theta_0(t)+\varepsilon\theta_1(t)$. بسط فوق حرکت نوسانی با فرکانس تحریک را جستجو می‌کند. همچنین می‌توانستیم با تبدیل معادله دیفرانسیل و بسط و جایگذاری فرکانس پاسخ، از معادله *لیندستد* نیز استفاده کنیم.

۱-۱۲- نوسانات زیر هارمونیک[1] و فوق هارمونیک[2]

سیستم‌های ارتعاشی خطی با فرکانس تحریک ارتعاش می‌کنند. در سیستم‌های ارتعاشی غیر خطی پاسخ سیستم، پاسخی با فرکانس زیر هارمونیک یا فوق هارمونیک خواهد بود. ممکن است این پرسش مطرح شود که چرا این نوع حرکت‌های هارمونیک ایجاد می‌شوند؟ استوکر[3] اشاره می‌کند که، «به طور کلی ارائه یک توضیح فیزیکی قابل قبول برای علت وقوع این نوع از حرکت‌های هارمونیک کار ساده‌ای نیست.»

پاسخ‌های زیر هارمونیک شامل نوساناتی با فرکانس‌های ω_m هستند که این فرکانس با رابطه زیر به

1- Subharmonic
2- Superharmonic
3- Stoker, P.103

فرکانس تحریک مرتبط می‌شود:

$$\omega_m = \frac{\Omega}{m} \quad ; \qquad m = 2,3,... \tag{۱-۱۱۱}$$

به طور مشابه پاسخ‌های فوق هارمونیک شامل نوساناتی با فرکانس ω_n هستند که این فرکانس با رابطه زیر به فرکانس تحریک مرتبط می‌شود:

$$\omega_n = n\Omega \quad ; \qquad n = 2,3,... \tag{۱-۱۱۲}$$

اضافه بر این، سیستم‌های غیر خطی که تحت تحریک‌های خارجی با دو فرکانس متفاوت Ω_1 و Ω_2 قرار می‌گیرند، با ترکیب‌های مختلفی از این فرکانس‌ها ارتعاش می‌کنند. چند حالت از موارد فوق در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد تا حالت‌های امکان پذیر را نمایش دهد.

باید توجه داشت که در اینجا ضرائب فرکانس پاسخ متناوب همیشه ضریب کاملا صحیحی از فرکانس تحریک نبوده و این ضریب ممکن است تقریباً به یک عدد صحیح نزدیک باشد. علاوه بر این باید توجه داشت که هر عدد گویایی این اثررا ایجاد نمی‌کند، بلکه تنها اعداد گویایی که نسبت کوچکی از اعداد صحیح است، این اثر را ایجاد می‌کند، مثل $\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$.

۱-۱۲-۱- نوسانان زیر هارمونیک

وقتی که یک معادله دیفرانسیل غیر خطی تحت اثر تحریکی خارجی قرار می‌گیرد، ترم‌های غیر خطی موجود در معادلات می‌تواند منجر به ایجاد حرکت زیر هارمونیک بر اساس دامنه تغیرات پارامترها یا به طور خاص براساس دامنه تغیرات فرکانس‌های تحریک شود. همچنین دامنه نیرو نقش مهمی در تولید حرکت زیر هارمونیک حتی در حضور میرایی بازی می‌کند. اما به هر حال اختلاف اندکی در شرایط لازم برای ایجاد این نوع حرکت در تئوری و سیستم‌های واقعی وجود دارد.

ارتعاشگر نامیرای *Duffing* دارای یک حل متناوب با فرکانس اصلی برابر یک سوم فرکانس تحریک است. معادله (۱-۷۲) را با این تفاوت که دامنه نیروی تحریک خیلی کوچک نباشد در نظر بگیریم:

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=\varepsilon\left[-\omega_n^2\left(\alpha x+\beta x^3\right)+F\cos\Omega t\right] \quad , \quad \varepsilon<<1 \tag{۱-۱۱۳}$$

عبارت $\omega_n=\dfrac{\Omega}{3}$ را در نظر گرفته و بسط زیر را برای حل معادله فوق فرض می‌کنیم:

$$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots \tag{۱-۱۱۴}$$

برای نوسانگر نامیرا نیازی به بسط زاویه فاز نیست. با انجام مراحل اجرا شده در مسائل قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_0+\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_0=F\cos\Omega t\\
&\ddot{x}_1+\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_1=-\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2\left(\alpha x_0+\beta x_0^3\right)\\
&\ddot{x}_2+\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2 x_2=-\left(\frac{\Omega}{3}\right)^2\left(\alpha x_1+3\beta x_0^2 x_1\right)
\end{aligned} \tag{۱-۱۱۵}$$

مجموعه معادلات (۱-۱۱۵) باید به طور متوالی و با در نظر گرفتن شرط تناوب زیر حل شود:

$$x_i\left(\frac{\Omega}{3}t+2\pi\right)=x_i\left(\frac{\Omega}{3}t\right) \tag{۱-۱۱۶}$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه $x_i'(0)=0$ برای همه مقادیر i، حل معادله اول از مجموعه معادلات (۱-۱۱۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$x_0(t)=C_0\cos\frac{\Omega}{3}t-\frac{9F}{8\Omega^2}\cos\Omega t \tag{۱-۱۱۷}$$

با جایگذاری این معادله در معادله مربوط به $x_1(t)$ می‌توان آن را بدست آورد. پس از بسط دادن x_0^3 و ساده سازی آن، برای بدست آوردن حل متناوب، ضریب عبارت $\cos\left(\dfrac{\Omega}{3}t\right)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم. در این صورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_0^2-\frac{9F}{8\Omega^2}C_0+2\left(\frac{9F}{8\Omega^2}\right)^2+\frac{4\alpha}{3\beta}=0 \tag{۱-۱۱۸}$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم با ریشه‌های زیر است:

$$C_0=\frac{1}{2}\frac{9F}{8\Omega^2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7\left(\frac{9F}{8\Omega^2}\right)^2-\frac{16\alpha}{3\beta}} \tag{۱-۱۱۹}$$

که در این رابطه C_0 یک عدد حقیقی است. عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا برابر صفر باشد. همچنین با در نظر گرفتن عبارت

$$\begin{aligned} &\omega_0 \equiv (1+\varepsilon\alpha)\omega_n^2 = (1+\varepsilon\alpha)\frac{\Omega^2}{9} \\ &or \quad \Omega^2 \cong 9\omega_0^2(1-\alpha\varepsilon) \end{aligned} \tag{۱۲۰-۱}$$

که در آن از رابطه $(1+\alpha\varepsilon)^{-1} \cong (1-\alpha\varepsilon)$ استفاده شده است، می‌توان نوشت $\omega_n = \dfrac{\Omega}{3}$.

این نوسانگر و نوسانگرهای مشابه، زیر هارمونیک از مرتبه ۳ نامیده می‌شوند. درجه زیر هارمونیک در این نوسانگرها با درجه توابع غیر خطی در نیروی بازگرداننده فنر مطابقت دارد.

۱-۱۲-۲- ترکیب تناوب‌ها[1]

در ارتعاشات خطی، نوسانگری که تحت اثر دو تحریک هارمونیک با فرکانس‌های متفاوت قرار گیرد، مطابق اصل جمع آثار، پاسخی برابر جمع پاسخ‌ها به هر یک از تحریک‌ها بطور جداگانه خواهد داشت. در اینجا نوسانگرهای غیر خطی را از این جهت مورد بررسی قرار می‌دهیم. بعلاوه پاسخ‌های غیر همبسته، پاسخ‌هایی هستند که ضرائب صحیحی از فرکانس‌های تحریک، مانند ترکیب خطی فرکانس‌های تحریک، باشند. معادله *Duffing* را در شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -\varepsilon\beta\omega_n^2 x^3 + F_1\cos\Omega_1 t + F_2\cos\Omega_2 t \qquad ; \qquad \varepsilon << 1 \tag{۱۲۱-۱}$$

با در نظر گرفتن حل بسط یافته و برابر قرار دادن توان‌های مساوی ε خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + \omega_n^2 x_0 = F_1\cos\Omega_1 t + F_2\cos\Omega_2 t \\ &\ddot{x}_1 + \omega_n^2 x_1 = -\beta\omega_n^2 x_0^3 \\ &\ddot{x}_2 + \omega_n^2 x_2 = -3\beta\omega_n^2 x_0^2 x_1 \end{aligned} \tag{۱۲۲-۱}$$

تنها با در نظر گرفتن پاسخ حالت ماندگار، حل معادله اول از مجموعه معادلات (۱-۱۲۲) عبارت است از:

$$\begin{aligned} &x_0(t) = G_1\cos\Omega_1 t + G_2\cos\Omega_2 t \\ &G_1 = \frac{F_1}{\omega_n^2 - \Omega_1^2} \qquad ; \qquad G_2 = \frac{F_2}{\omega_n^2 - \Omega_2^2} \end{aligned} \tag{۱۲۳-۱}$$

1- Combination Harmonics

با جایگذاری رابطه (۱-۱۲۳) در معادله دوم از مجموعه معادلات (۱-۱۲۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_n^2 x_1 = {} & C_1 \cos\Omega_1 t + C_2 \cos\Omega_2 t \\ & + C_3\left[\cos\left(2\Omega_1 + \Omega_2\right)t + \cos\left(2\Omega_1 - \Omega_2\right)t\right] \\ & + C_4\left[\cos\left(\Omega_1 + 2\Omega_2\right)t + \cos\left(\Omega_1 - 2\Omega_2\right)t\right] \\ & + C_5 \cos 3\Omega_1 t + C_6 \cos 3\Omega_2 t\end{aligned} \qquad (۱-۱۲۴)$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{3}{4}\beta\omega_n^2 G_1\left(G_1^2 + 2G_2^2\right) \quad ; \quad & C_2 &= -\frac{3}{4}\beta\omega_n^2 G_2\left(2G_1^2 + G_2^2\right) \\ C_3 &= -\frac{3}{4}\beta\omega_n^2 G_1^2 G_2 \quad ; \quad & C_4 &= -\frac{3}{4}\beta\omega_n^2 G_1 G_2^2 \\ C_5 &= -\frac{1}{4}\beta\omega_n^2 G_1^3 \quad ; \quad & C_6 &= -\frac{1}{4}\beta\omega_n^2 G_2^3 \end{aligned} \qquad (۱-۱۲۵)$$

در اینجا به خوبی مشخص است که نتایج حل معادله غیر خطی، شامل ترکیب خطی فرکانس‌های Ω_1 و Ω_2 است. باید توجه داشت که ترکیب تناوب‌ها در پاسخ مرتبه ε^1 ظاهر می‌شود که از نظر اثر از پاسخ مرتبه صفر یعنی $x_0(t)$ پایین‌تر است. به هر حال اگر هر یک از فرکانس‌های ترکیبی نزدیک به فرکانس ω_n باشد، وقوع رزونانس در دامنه پاسخ امکان پذیر است. عبارت‌های مربوط به G_1 و G_2 نشان می‌دهد که چگونه این افزایش دامنه رخ خواهد داد.

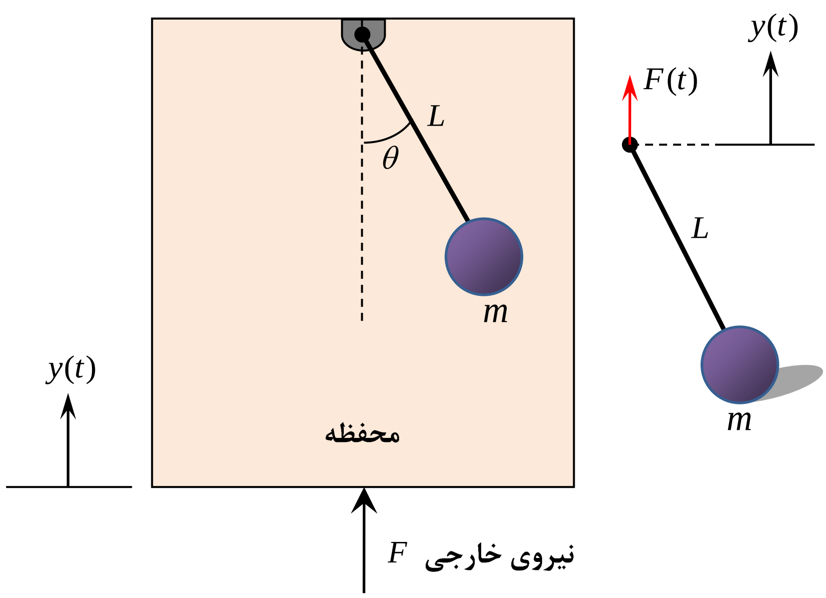
۱-۱۳- معادله متیبو[1]

به مسائلی که در آنها معادلات دارای ضرائب متغیر با زمان هستند باز می‌گردیم. در شکل ۱-۹ پاندولی با پایه متحرک نشان داده شده است. این مدل ساده برای بررسی چسبندگی مایع درون یک ظرف مثل سوخت هواپیما یا راکت‌ها استفاده می‌شود.

معادلات حرکت در این حالت به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}&\ddot{y} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta + g = \frac{F}{m} \\ &mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{y}\sin\theta + mgL\sin\theta = 0\end{aligned} \qquad (۱-۱۲۶)$$

1- Mathieu Equation



شکل ۱-۹، پاندول نوسان کننده درون یک محفظه عمودی نوسانگر

حال فرض کنیم که ما به دنبال حرکت پایدار سیستم حول نقطه تعادل $\theta = 0$ هستیم. در ناحیه‌ای که تغییرات θ کوچک است، معادله دوم از مجموعه معادلات (۱-۱۲۶) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{L}(\ddot{y} + g)\theta = 0 \qquad (۱-۱۲۷)$$

این معادله خطی شده اما هنوز به علت وجود عبارت $\ddot{y}$ با معادله دیفرانسیل حرکت در راستای y همبسته است. همچنین معادله دیفرانسیل در راستای y نیز به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{y} + L\ddot{\theta}\theta + L\dot{\theta}^2 + g = \frac{F}{m} \qquad (۱-۱۲۸)$$

این معادله نیز ساده شده است اما همچنان غیر خطی است. اگر θ و $\dot{\theta}$ هر دو کوچک باشند، ترم‌های مرتبه بالاتر مثل $\dot{\theta}^2$ و $\ddot{\theta}\theta$ قابل صرف نظر هستند. در این صورت معادله (۱-۱۲۸) به صورت زیر خطی می‌شود:

$$\ddot{y} + g = \frac{F}{m} \qquad (۱-۱۲۹)$$

این معادله از معادله حرکت در راستای θ مستقل است. فرض کنیم که حرکت پایه هارمونیک و به شکل $y = A\cos\omega t$ باشد. از معادله (۱-۱۲۹) نیروی مورد نیاز این حرکت عبارت است از:

$$F(t) = -mA\omega^2 \cos\omega t + mg \tag{۱۳۰-۱}$$

در این صورت معادله (۱-۱۲۷) نیز به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{L}\left(g - A\omega^2 \cos\omega t\right)\theta = 0 \tag{۱۳۱-۱}$$

رابطه فوق یک معادله دیفرانسیل با ضرائب متغیر نسبت به زمان است. معادله در این شکل معادله مَتییو نامیده می‌شود. با کمی دقت در این معادله مشخص است که عبارت $(g - A\omega^2 \cos\omega t)$ یک تابع هارمونیک بوده و بسته به مقدار A و ω می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر $g > A\omega^2$ در این صورت $g > A\omega^2 \cos\omega t$ و در نتیجه ضریب θ در معادله دیفرانسیل همواره مثبت بوده و بنابراین پاسخ سیستم پایدار است. برعکس، برای $g < A\omega^2$، پاسخ معادله فوق ضریبی به شکل $\exp(+\omega t)$ خواهد داشت که بدون کران افزایش می‌یابد. معادله متییو در بسیاری از زمینه‌ها موضوع بحث قرار می‌گیرد. به علت وجود احتمال ناپایداری، در اینجا محدوده تغییرات هر یک از پارامترها را برای اینکه پاسخ پایدار یا متناوب باشد تعیین کرده و مرز بین پایداری و ناپایداری را مشخص می‌کنیم. با استفاده از روش اغتشاش می‌توان حل متناوب را در این مسئله به عنوان مرز پایداری بدست آورد. شکل کلی معادله متییو به صورت زیر است:

$$\ddot{\theta} + \left(\delta + 2\varepsilon \cos 2t\right)\theta = 0 \tag{۱۳۲-۱}$$

که در این رابطه $\varepsilon << 1$ و تبدیل معادله (۱-۱۳۱) به (۱-۱۳۲) واضح و مشخص است. این معادله یک سیستم شبه هارمونیک را مشخص می‌کند. به ازای $\varepsilon = 0$ معادله فوق، معادله دیفرانسیل حرکت یک نوسانگر خطی بوده و δ معادل مربع فرکانس طبیعی این سیستم خطی خواهد بود. خصوصیات نوسان وابسته به نسبت مقادیر δ و ε بوده و ناحیه پایداری به راحتی در فضای پارامترهای $\varepsilon - \delta$ ترسیم می‌شود. در این ترسیم، صفحه توسط یک منحنی مرزی به دو ناحیه پایدار و ناپایدار تقسیم می‌شود. هر نقطه روی منحنی مرزی معرف حرکت هارمونیک به عنوان حالت مرزی حرکت پایدار و ناپایدار است.

در اینجا از روش لیندستد برای بدست آوردن پاسخ هارمونیک معادله متییو می‌توان استفاده کرد. برای دستیابی به این هدف، بسط زیر را برای $\theta(t)$ و همچنین فرکانس δ در نظر می‌گیریم:

$$\theta(\varepsilon,t)=\theta_0(t)+\varepsilon\theta_1(t)+\varepsilon^2\theta_2(t)+\dots$$
$$\delta=n^2+\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\dots \quad ; \quad n=0,1,2,\dots \tag{۱-۱۳۳}$$

علت بسط دادن δ در این مسئله این است که δ اندکی با مربع یک عدد صحیح مثل n تفاوت دارد. همچنین δ نشان دهنده مربع فرکانس حرکت است و البته می‌دانیم که رفتار سیستم شبه هارمونیک بوده و بنابراین δ تفاوت زیادی با n^2 نخواهد داشت.

با جایگذاری بسط‌های فوق در معادله (۱-۱۳۲) و برابر قرار دادن توان‌های مساوی ε مجموعه معادلات دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{\theta}_0+n^2\theta_0=0$$
$$\ddot{\theta}_1+n^2\theta_1=-(\delta_1+2\cos 2t)\theta_0$$
$$\ddot{\theta}_2+n^2\theta_2=-(\delta_1+2\cos 2t)\theta_1-\delta_2\theta_0 \quad ; \quad n=0,1,2,\dots \tag{۱-۱۳۴}$$

به ازای هر مقدار n یک مجموعه از معادلات بدست می‌آید. مشخص است که مجموعه معادلات (۱-۱۳۴) باید برای هر مقدار n به صورت متوالی حل شوند. اولین معادله در این مجموعه پاسخی به صورت زیر خواهد داشت:

$$\theta_0=\begin{cases}\cos nt\\ \sin nt\end{cases} \quad , \quad n=0,1,2,\dots \tag{۱-۱۳۵}$$

منحنی مرزی با جایگذاری رابطه (۱-۱۳۵) در مجموعه معادلات (۱-۱۳۴) و تعیین پارامترها به گونه‌ای که پاسخ $\theta_i(t)$, $i=0,1,2,\dots$ متناوب باشد، بدست می‌آید. اجرای این روند منجر به تولید بینهایت جفت جواب می‌شود. برای هر مقدار n یک جفت جواب بدست می‌آید بجز حالت $n=0$ که تنها یک جواب را تولید می‌کند.

در ابتدا حالت $n=0$ را در نظر بگیریم. در این حالت $\theta_0=1$ خواهد بود. (باید توجه داشت که $\theta_0=0$ جواب بدیهی مسئله بوده و اطلاعاتی راجع به رفتار سیستم ارائه نمی‌کند). در این صورت معادله دوم عبارت است از:

$$\ddot{\theta}_1=-\delta_1-2\cos 2t \tag{۱-۱۳۶}$$

با توجه به (۱-۱۳۶) برای اینکه θ_1 متناوب باشد، لازم است که δ_1 برابر صفر باشد. در این صورت

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\cos 2t \tag{۱۳۷-۱}$$

معادله دوم برای θ_2 به ازای $n=0$ به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_2 &= -2\cos 2t\left(\frac{1}{2}\cos 2t\right) - \delta_2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} + \delta_2\right) - \frac{1}{2}\cos 4t\end{aligned} \tag{۱۳۸-۱}$$

که در آن از رابطه مثلثاتی $\cos^2 2t = \frac{(1+\cos 4t)}{2}$ استفاده شده است. در اینجا نیز برای اینکه θ_2 متناوب باشد، لازم است که عبارت ثابت در سمت راست معادله (۱-۱۳۸) برابر صفر باشد. بنابراین لازم است که $\delta_2 = -\frac{1}{2}$ باشد. با توجه به مطالب فوق به ازای $n=0$ تنها یک منحنی مرزی وجود دارد:

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots \tag{۱۳۹-۱}$$

این معادله که تقریبی از مرتبه ۲ است معادله یک سهمی است که از مبدأ مختصات صفحه پارامترهای $\varepsilon - \delta$ می‌گذرد.

در مرحله بعد حالت $n=1$ را در نظر می‌گیریم. در این مورد دو حل از مرتبه صفر وجود دارد:

$$\theta_0 = \begin{cases}\cos t \\ \sin t\end{cases} \tag{۱۴۰-۱}$$

برای بدست آوردن منحنی مرزی به ازای پاسخ اول یعنی $\theta_0 = \cos t$، معادله θ_1 به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \theta_1 &= -(\delta_1 + 2\cos 2t)\cos t \\ &= -(\delta_1 + 1)\cos t - \cos 3t\end{aligned} \tag{۱۴۱-۱}$$

که در آن از اتحاد $2\cos 2t\cos t = \cos 3t + \cos t$ استفاده شده است. از مطالعه سیستم‌های ارتعاشی خطی می‌دانیم که هرگاه یک سیستم ارتعاشی تحت اثر تحریکی هارمونیک با فرکانسی برابر فرکانس طبیعی سیستم قرار گیرد، رزونانس یا تشدید ایجاد می‌شود. در این معادله فرکانس طبیعی ۱ است و نیروی تحریک $-(\delta_1+1)\cos t$ نیز فرکانسی برابر ۱ دارد. از این رو برای جلوگیری از تولید ترم‌های

سکولار لازم است که $\delta_1 = -1$. بنابراین پاسخ معادله دیفرانسیل ساده شده (۱-۱۴۱) به صورت زیر است:

$$\theta_1 = \frac{1}{8}\cos 3t \tag{۱-۱۴۲}$$

با جایگذاری θ_0، θ_1 و δ_1 در معادله θ_2، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 + \theta_2 &= -\frac{1}{8}(-1+2\cos 2t)\cos 3t - \delta_2 \cos t \\ &= -\left(\frac{1}{8}+\delta_2\right)\cos t + \frac{1}{8}\cos 3t - \frac{1}{8}\cos 5t \end{aligned} \tag{۱-۱۴۳}$$

که در آن از اتحاد $2\cos 2t\cos 3t = \cos 5t + \cos t$ استفاده شده است. در اینجا نیز برای اینکه θ_2 متناوب باشد، لازم است که ضریب عبارت $\cos t$ مساوی صفر باشد که این مسئله منجر می‌شود که $\delta_2 = -\frac{1}{8}$. با صرف نظر از محاسبه عبارات بالاتر از مرتبه ۲، منحنی مرزی به ازای $\theta_0 = \cos t$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots \tag{۱-۱۴۴}$$

برای استخراج منحنی مرزی به ازای $\theta_0 = \sin t$، معادله دفرانسیل مربوط به θ_1 به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \theta_1 &= -(\delta_1 + 2\cos 2t)\sin t \\ &= -(\delta_1 - 1)\sin t - \sin 3t \end{aligned} \tag{۱-۱۴۵}$$

که در این رابطه از اتحاد مثلثاتی $2\cos 2t\sin t = \sin 3t - \sin t$ استفاده شده است. پاسخ این معادله در صورتی متناوب است که $\delta_1 = 1$ و در این صورت:

$$\theta_1 = \frac{1}{8}\sin 3t \tag{۱-۱۴۶}$$

با جایگذاری معادله θ_2 به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 + \theta_2 &= -\frac{1}{8}(-1+2\cos 2t)\sin 3t - \delta_2 \sin t \\ &= -(\frac{1}{8}+\delta_2)\sin t - \frac{1}{8}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin 5t \end{aligned} \tag{۱-۱۴۷}$$

که در آن از رابطه $2\cos 2t \sin 3t = \sin 5t + \sin t$ استفاده شده است. در اینجا نیز برای اینکه θ_2 متناوب باشد، لازم است که $\delta_2 = -\dfrac{1}{8}$ و بنابراین منحنی مرزی به ازای $\theta_0 = \sin t$ عبارت است از:

$$\delta = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots \qquad (۱۴۸-۱)$$

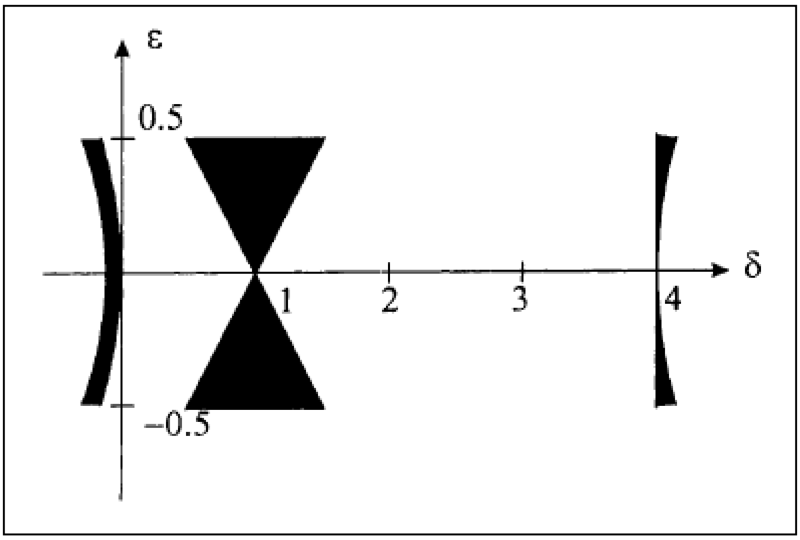
با ادامه این روند منحنی مرزی (منحنی انتقال) برای $n = 2$، به ازای $\theta_0 = \cos 2t$ عبارت از:

$$\delta = 4 + \frac{5}{12}\varepsilon^2 + \ldots \qquad (۱۴۹-۱)$$

و به ازای $\theta_0 = \sin 2t$ عبارت از:

$$\delta = 4 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \ldots \qquad (۱۵۰-۱)$$

خواهد بود. منحنی انتقال برای $n = 3,4,\ldots$ نیز به همین روش بدست می‌آید. منحنی‌های انتقال را می‌توان در صفحه $\delta - \varepsilon$ رسم کرده و ناحیه پایدار و ناپایدار را مشخص کرد. شکل ۱-۱۰ منحنی‌های تولید شده به ازای $n = 0,1,2$ را نشان می‌دهد. این شکل به دیاگرام استروت[1] معروف است که پس از لرد ریلی[2] نامگذاری شده است.



شکل ۱-۱۰، ناحیه رنگ شده ناپایدار است. منحنی‌های مرزی به ازای $n = 0,1$ و 2 رسم شده‌اند.

1- Strutt Diagram
2- Lord Rayleigh

ناحیه خاتمه یافته در $(\delta,\varepsilon)=(1,0)$، به عنوان ناحیه ناپایدار اصلی شناخته می‌شود. این ناحیه از ناحیه خاتمه یافته در $\delta = n^2 \;\;,\;\; n = 2,3,...$ پهن‌تر است. ناحیه ناپایدار که سیاه رنگ شده است، حول محور δ متقارن است. نواحی پایدار در نقاط $\delta = n^2 \;,\; \varepsilon = 0 \;,\; n = 0,1,2,...$ متصل هستند.

یک طراح در موارد مشابه باید نموداری مشابه نمودار فوق را رسم کند تا بتواند محاسبه کند که آیا پارامترهای استفاده شده در طراحی در ناحیه پایدار یا نزدیک به آن قرار دارند یا نه. بیاد بیاوریم که $\delta = \dfrac{g}{L}$ و $\varepsilon = -\dfrac{A\omega^2}{2L}$. δ و ε می‌توانند هر مقداری را در یک سیستم فیزیکی اختیار کنند، اما تنها مقادیر معینی از آنها منجر به تولید پاسخ هارمونیک خواهد شد. معادله متییو با میرایی نیز منجر به تولید نتایج مشابهی خواهد شد با این تفاوت که برای ضرائب میرائی $C > 0$، ناحیه سایه خورده از محور δ منفصل خواهد شد.

۱-۱۴- معادله واندرپل[1]

معادله واندرپل بدون تحریک خارجی به صورت زیر است:

$$\ddot{x} - \alpha\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0 \qquad , \qquad \alpha > 0 \tag{۱-۱۵۱}$$

اگر α کوچک باشد، می‌توان از نوشتار ε استفاده کرد؛ در این صورت معادله واندرپل به شکل زیر در می‌آید:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} \tag{۱-۱۵۲}$$

اگر $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ...$ باشد، شکل بسط یافته سمت راست معادله (۱-۱۵۲) با تقریب مرتبه ε^2به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\left(1 - x^2\right)\dot{x} &\cong \left[1 - \left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2\right)^2\right]\left(\dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1 + \varepsilon^2\dot{x}_2\right) \\ &\cong \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_0 + \varepsilon\left[-2x_0x_1\dot{x}_0 + \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_1\right] \\ &\quad + \varepsilon^2\left[-x_1^2\dot{x}_0 - 2x_0x_2\dot{x}_0 - 2x_0x_1\dot{x}_1 + \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_2\right]\end{aligned} \tag{۱-۱۵۳}$$

1- The Van der Pol Equation

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۱-۱۵۲) و برابر قرار دادن توان‌های مشابه ε معادلات اغتشاش زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0 : \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\
&\varepsilon^1 : \ddot{x}_1 + x_1 = \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_0 \\
&\varepsilon^2 : \ddot{x}_2 + x_2 = -2x_0 x_1 \dot{x}_0 + \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_1 \\
&\varepsilon^3 : \ddot{x}_3 + x_3 = -x_1^2 \dot{x}_0 - 2x_0 x_2 \dot{x}_0 - 2x_0 x_1 \dot{x}_1 + \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_2
\end{aligned} \tag{۱-۱۵۴}$$

از آنجا که بسط اولیه از مرتبه ε^2 بوده است، از معادله مرتبه $O\left(\varepsilon^3\right)$صرف نظر می‌کنیم. مجموعه معادلات (۱-۱۵۴) باید بطور متوالی حل شوند. در این صورت حل تقریبی معادله تحریک نشده واندرپل به صورت $x(t) \cong x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ خواهد بود.

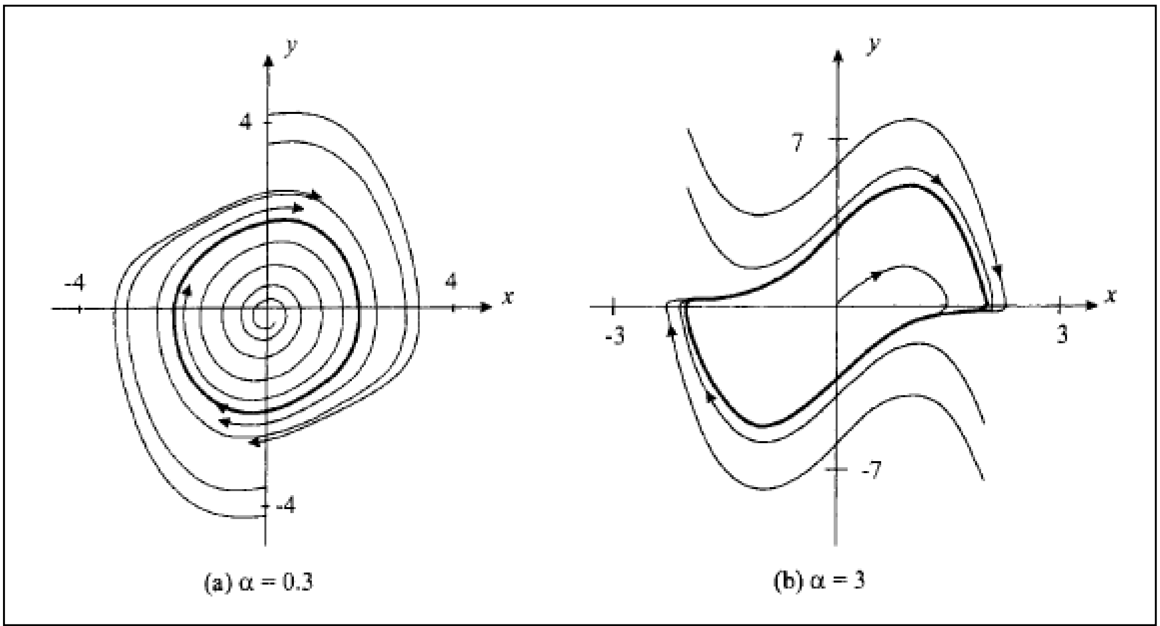
۱-۱۴-۱- دوره‌های محدود[1]

در مباحث مقدماتی قبل در باره پایداری و ناپایداری سیستم‌های ارتعاشی، مشخص شد که در هر حرکتی، سیستم یا به سوی نقطه تعادل خود باز می‌گردد و یا از نقطه تعادل خود دور شده و به سوی ناپایداری می‌رود. علاوه بر این دو حالت، حالت دیگری نیز وجود دارد که سیار شبیه منحنی مسیر بیضوی است که در بخش‌های قبل مورد بحث قرار گرفت. تفاوت در اینجاست که حرکت متناوب منحنی مسیر بسته ندارد بلکه تنها به نقطه تعادل یا نقطه شرایط اولیه نزدیک می‌شود.

در برخی از سیستم‌های ارتعاشی با میرایی، منحنی مسیر از نقطه‌ای نزدیک به مبدأ یا نقطه‌ای دور از مبدأ آغاز شده و مثل یک منحنی بسته حول مبدأ به نقطه اولیه نزدیک می‌شود. این منحنی یک حل متناوب و نه هارمونیک را برای معادلات حرکت نشان می‌دهد. این منحنی، منحی دوره‌های محدود(سیکل‌های محدود) نامیده می‌شود. یکی از معادلات کلاسیک که چنین منحنی را تولید می‌کند، معادله واندرپل است که رابطه (۱-۱۵۱) یک شکل آن است. معادله واندرپل را تنها می‌توان با استفاده از روش‌های عددی حل کرد.

1- Limit Cycles

این معادله در زمینه‌های متعددی مثل سیستم‌های ارتعاشی یا الکتریکی غیر خطی مورد بحث قرار می‌گیرد. در چنین سیستم‌های ارتعاشی فیزیکی، نیروی میرایی، $\alpha(1-x^2)\dot{x}$، به ازای دامنه حرکت کوچک، منفی(در خلاف جهت حرکت) و به ازای دامنه حرکت بزرگ، مثبت(در جهت حرکت) است. در واقع جهت این نیرو به علامت $\alpha(1-x^2)$ بستگی دارد.



شکل ۱-۱۱، منحنی مسیر برای دو مقدار α در معادله واندرپل برای تعدادی از شرایط اولیه. منحنی‌های سیکل محدود با خطوط تیره نشان داده شده است.

صفحه فاز را برای معادله واندرپل در نظر بگیریم:

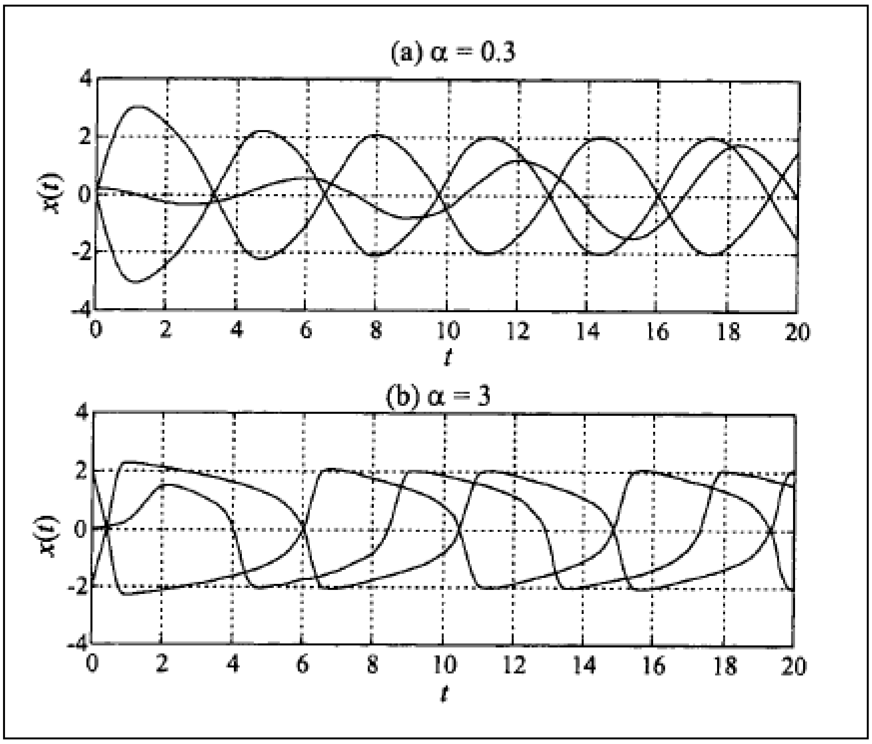
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \alpha(1-x^2)y - x\end{aligned} \tag{۱۵۵-۱}$$

منحنی مسیر با معادله زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(1-x^2)y - x}{y} \tag{۱۵۶-۱}$$

با رسم منحنی‌های مسیر متفاوت بدون توجه به شرایط اولیه، منحنی سیکل‌های محدود بدست می‌آید. نقطه اولیه‌ای که درون منحنی سیکل محدود قرار دارد، یک منحنی مسیر مارپیچ به سمت بیرون و نقطه اولیه‌ای که خارج از منحنی سیکل محدود قرار دارد، یک منحنی مسیر مارپیچ به سمت داخل را

دنبال می‌کند. سیکل‌های محدود دارای ویژگی منحصر به فردی هستند که بیشینه مقدار x در آن بدون توجه به مقدار α نزدیک به ۲ است. شکل ۱-۱۱ منحنی مسیر را در دو حالت نمایش می‌دهد. شکل ۱-۱۲ تاریخچه زمانی حرکت نوسانگر را در دو حالت فوق و با شرایط اولیه متفاوت نمایش می‌دهد.



شکل ۱-۱۲، تاریخه زمانی معادله واندرپل به ازای مجموعه‌های شرایط اولیه مختلف

۱-۱۴-۲- معادله واندرپل با تحریک خارجی

معادله تحریک شده واندرپل مدلی برای سیستم‌هایی است که وقتی تحت تاثیر سیستم‌های نوسانی دیگر قرار می‌گیرند، توانائی خود - نوسانی[1] دارند. راند[2] اشاره می‌کند که فرآیندهای زیستی مثل سیکل خواب و بیداری انسان که توسط ساعت زیستی بدن تنظیم می‌شود را نمی‌توان با معادله واندرپل مدل‌سازی کرد به طوری که در این معادله سیکل شب و روز که بر اثر حرکت وضعی زمین ایجاد

1- Self - Oscillation
2- **Lecture Note on Nonlinear Vibratin**, R.H. Rand. Look up the last version at http://www.tam.cornell.edu/randdocs.

می‌شود، عبارت تحریک خاری را تشکیل می‌دهد. این پدیده را که دوره تناوب نوسانات تحریک شده، مضرب صحیحی از دوره تناوب نیروی تحریک باشد، پیروی فرکانسی[1] می‌گوییم. می‌گوییم فرکانس پاسخ که در اینجا با ν نمایش داده می‌شود، از فرکانس تحریک که در اینجا با ω نمایش داده می‌شود، پیروی می‌کند؛ هرگاه $\nu = \frac{\omega}{l}$ که l ضریب صحیح مثبتی است که ضریب پیروی[2] نامیده می‌شود. معادله واندرپل این ویژگی را داراست.

معادله واندرپل تحریک شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = F\cos\omega t \qquad (۱۵۷-۱)$$

همین معادله در حالت تحریک نشده دارای دوره محدودی با شعاع ۲ و دوره تناوب 2π است. دوره محدود با تعادل بین انرژی به حدر رفته داخلی و انرژی تولیدی حاصل می‌شود. تحریک خاری این تعادل را تغییر می‌دهد.

اگر F کوچک باشد، تحریک خارجی را تحریک ضعیف می‌گوئیم. در این حالت اثر نیروی تحریک وابسته به این است که آیا فرکانس آن به فرکانس طبیعی سیستم نزدیک است یا نه. اگر این حالت رخ دهد، نوساناتی تشکیل خواهد شد که اغتشاشی در دوره محدود است. اگر F کوچک نباشد، تحریک خارجی را تحریک قوی می‌گوییم. اگر فرکانس طبیعی و فرکانس تحریک به هم نزدیک نباشد، انتظار می‌رود که نوساناتی طبیعی حاصل شود که با پیروی از یک معادله خطی نوسانات را میرا می‌کند. با تبدیل زمان به $\omega t = \tau$، معادله (۱-۱۵۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\omega_2 x'' + \varepsilon\omega\left(x^2 - 1\right)x' + x = F\cos\tau \qquad (۱۵۸-۱)$$

هر یک ا موارد فوق باید مورد امتحان قرار گیرد. ابتدا فرض می‌کنیم که تحریک قوی بوده و از شرایط تشدید نیز فاصله داشته باشد. مطابق معمول با استفاده از بسط

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \ldots \qquad (۱۵۹-۱)$$

مجموعه معادلات دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود:

1- Frequency Entrainment
2- Entrainment Index

$$\begin{aligned} \omega^2 x_0'' + x_0 &= F\cos\tau \\ \omega^2 x_1'' + x_1 &= -\omega\left(x_0^2 - 1\right)x_0' \end{aligned} \qquad (۱-۱۶۰)$$

که در این معادلات $x_0(\tau)$ و $x_1(\tau)$ توابعی با دوره تناوب 2π هستند. بنابراین:

$$x_0(\tau) = \frac{F}{1-\omega^2}\cos\tau \qquad (۱-۱۶۱)$$

می‌دانیم که حل $x_1(\tau)$ از مرتبه $O(\varepsilon)$ خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت:

$$x(\varepsilon,\tau) = \frac{F}{1-\omega^2}\cos\tau + O(\varepsilon) \qquad (۱-۱۶۲)$$

مشاهده می‌شود که پاسخ اغتشاش یافته پاسخ خطی معمولی بوده و همانطور که انتظار می‌رفت، دوره محدود نیز خنثی شده است. اگر تحریک ضعیف بوده و از محدوده تشدید نیز فاصله داشته باشد، مراحل حل مثل مراحل فوق بوده اما پاسخ معمولا ناپایدار است.

حال فرض می‌کنیم که تحریک ضعیف بوده اما نزدیک به حالت تشدید باشد. در این صورت می‌توان نوشت: $F = \varepsilon\gamma$ و در نزدیکی محدوده تشدید، $\omega = 1 + \varepsilon\omega_1$. حال با استفاده از بسط (۱-۱۵۹) مجموعه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} x_0'' + x_0 &= 0 \\ x_1'' + x_1 &= -2\omega_1 x_0'' - \left(x_0^2 - 1\right)x_0' + \gamma\cos\tau \end{aligned} \qquad (۱-۱۶۳)$$

با جستجوی جواب‌هایی با دوره تناوب 2π خواهیم داشت:

$$x_0(\tau) = a_0\cos\tau + b_0\sin\tau \qquad (۱-۱۶۴)$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 = &\left[\gamma + 2\omega_1 a_0 - b_0\left(\frac{1}{4}r_0^2 - 1\right)\right]\cos\tau \\ &+ \left[2\omega_1 b_0 + a_0\left(\frac{1}{4}r_0^2 - 1\right)\right]\sin\tau \\ &+ \ldots \\ r_0 = &\sqrt{a_0^2 + b_0^2} \end{aligned} \qquad (۱-۱۶۵)$$

که r_0 دامنه پاسخ $x_0(\tau)$ است. برای رسیدن به پاسخ متناوب لازم است که ضریب عبارت‌های هارمونیک سمت راست معادله فوق برابر صفر باشد، که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2\omega_1 a_0 - b_0\left(\frac{1}{4}r_0^2 - 1\right) &= -\gamma \\ 2\omega_1 b_0 + a_0\left(\frac{1}{4}r_0^2 - 1\right) &= 0 \end{aligned} \tag{۱-۱۶۶}$$

این دو معادله را می‌توان با هم ترکیب کرده و معادله زیر را بدست آورد:

$$r_0^2\left[4\omega_1^2 + \left(\frac{1}{4}r_0^2 - 1\right)^2\right] = \gamma^2 \tag{۱-۱۶۷}$$

این معادله مقادیر امکان پذیر برای r_0 را تعین می‌کند. باید توجه داشت که ممکن است سه مقدار حقیقی مثبت برای r_0 موجود باشد.

۱-۱۵- حرکت کلی

منظور از حرکت کلی بررسی شکل کلی غیر خطی معادلات دیفرانسیل حاکم است. این موضوع شامل بررسی وضعیت سیستم حول نقطه تعادل و همچنین استفاده از روش اغتشاش با فرض کوچک بودن برخی از پارامترها خواهد بود. معادلات غیر خطی معمولاً حل تحلیل نداشته و برای بدست آوردن پاسخ آنها به روش‌های عددی نیاز است. اما به هر حال بحث کلی در باره معادله دیفرانسیل غیر خطی برای یک سیستم با یک درجه آزادی امکان پذیر است.

معادله *حافظ انرژی*[1] زیر را در نظر بگیریم:

$$\ddot{x} = f(x) \tag{۱-۱۶۸}$$

که در این رابطه $f(x)$ یک تابعی غیر خطی است که معرف یک نیروی حافظ انرژی بر واحد جرم است. سمت چپ معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} \tag{۱-۱۶۹}$$

1- Conservative

بنابراین $\ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x} = f(x)dx$ و در نتیجه:

$$\int_0^x \ddot{x}dx = \int_0^{\dot{x}} \dot{x}d\dot{x} = \int_0^x f(\xi)d\xi + c \tag{۱۷۰-۱}$$

که

$$\int_0^{\dot{x}} \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \tag{۱۷۱-۱}$$

معرف انرژی جنبشی بر واحد جرم و

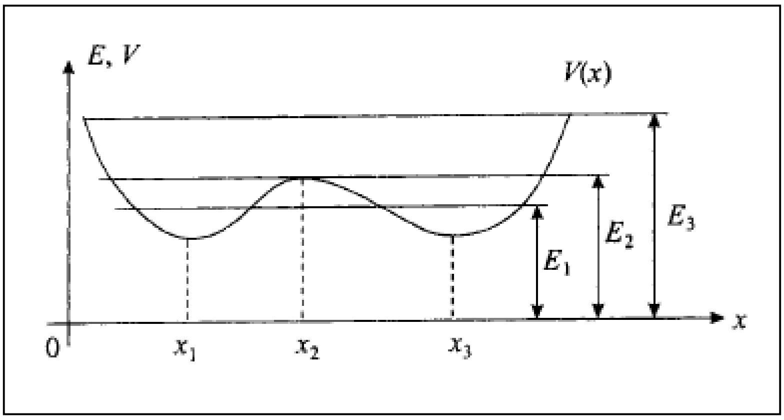
$$\int_0^x f(\xi)d\xi = -V(x) \tag{۱۷۲-۱}$$

منفی انرژی پتانسیل بر واحد جرم است. همچنین c ثابت انگرال گیری است. حال معادله (۱-۱۷۰) را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = c \tag{۱۷۳-۱}$$

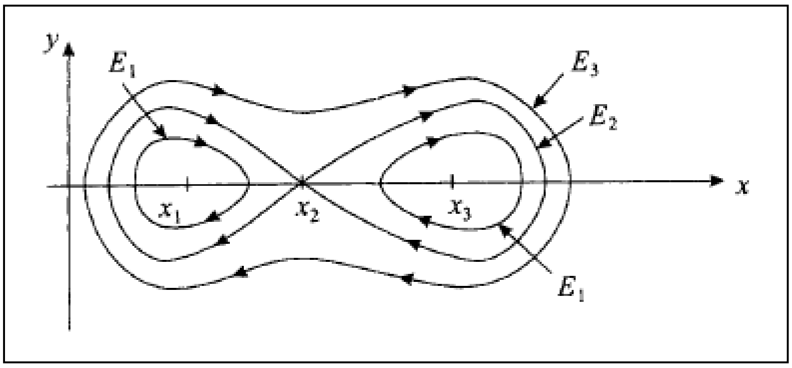
این معادله بیان می‌کند که انرژی کل سیستم ثابت است؛ $E = c$. رسم تابع انرژی فوق در صفحه فظای حالت بسیار مفید است. با در نظر گرفتن $\dot{x} = y$ داریم:

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \tag{۱۷۴-۱}$$



شکل ۱-۱۳، مقطع عرضی نمودار انرژی در صفحه $E-x$

با استفاده از معادله (۱-۱۷۴) می‌توان انرژی را بر حسب x و y رسم کرده و برای سطوح مختلف انرژی، نمودار را در صفحه x و y وارد کرد. به عنوان مثال با رسم انرژی بر حسب x و y در فضای سه بعدی و تصویر کردن آن در صفحه $E-x$، شکل ۱-۱۳ بدست می‌آید. همچنین با رسم منحنی‌های مسیر در سطوح انرژی ثابت، شکل ۱-۱۴ بدست می‌آید.



شکل ۱-۱۴، منحنی‌های مسیر به ازای مقادیر ثابت انرژی در صفحه $x-y$

مثال ۱-۵: منحنی مسیر و پایداری پاندول

نقاط تعادل را مشخص کرده و پایداری آنها را به ازای سطوح انرژی $E=\omega_n^2, 2\omega_n^2, 3\omega_n^2$ بررسی کنید.

حل

معادله حرکت به صورت زیر است:

$$\ddot{\theta}+\omega_n^2\sin\theta=0 \qquad (۱-۱۷۵)$$

و معادله مسیرهای حرکت به ازای $\theta=x$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-\omega_n^2\sin x\end{aligned} \qquad (۱-۱۷۶)$$

معادلات تعادل با صفر قرار دادن سرعت و شتاب، $\dot{x}=0$ و $\dot{y}=0$، در معادلات مسیر حرکت بدست می‌آید:

$$y=0 \quad ; \quad \sin x=0 \qquad (۱-۱۷۷)$$

در این صورت نقاط تعادل عبارتند از:

$$\begin{aligned} & y=0 \\ & x=\pm j\pi \quad ; \quad j=0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{۱۷۸-۱}$$

از نظر فیزیکی تنها دو نقطه تعادل وجود دارد چون پاندول می‌تواند تنها یک مسیر دایره‌ای راطی کند:

$$\begin{aligned} & y=0 \quad With \quad x=0 \\ & y=0 \quad With \quad x=\pi \end{aligned} \tag{۱۷۹-۱}$$

نقطه تعادل اول معادل حالتی است که پاندول در مبدأ ساکن باشد. نقطه تعادل دوم نیز معرف حالتی است که پاندول در حالت قائم (در زاویه ۱۸۰ درجه) ساکن باشد. اگر پاندول از یک میله بدون جرم و یک جرم متمرکز در انتهای آن تشکیل شده باشد، این مسئله قابل قبول خواهد بود که حالت قائم یک نقطه تعادل باشد که پاندول در آن ساکن می‌شود.

با استفاده از روش تشریح شده در بخش ۱-۵، ماتریس ضرائب در معادله (۱-۳۷) جهت خطی سازی معادلات حالت، برای نقطه تعادل اول، $x=0$، با فرض $\sin x \cong x$، به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۸۰-۱}$$

مقادیر ویژه این ماتریس ضرائب با مساوی صفر قرار دادن دترمینان زیر بدست می‌آید:

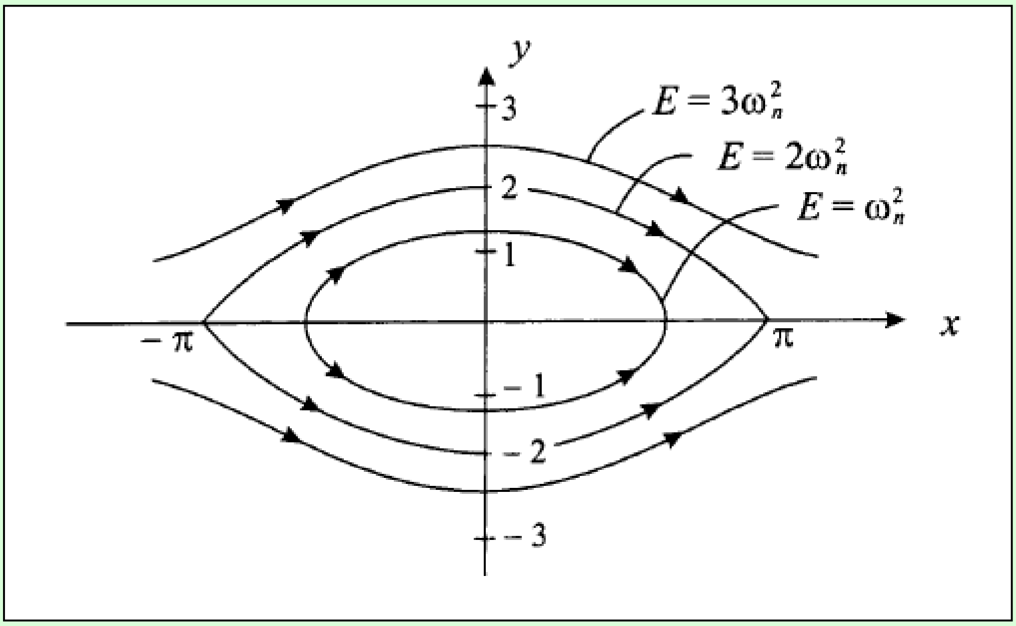
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_n^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{۱۸۱-۱}$$

در این صورت مقادیر ویژه برابر $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_n$ خواهند بود. هر دو مقدار ویژه موهومی خالص بوده و در نتیجه نقطه تعادل، مرکز یا رأس بوده و مطلقاً پایدار است. در نزدیکی نقطه تعادل دوم، $x=\pi$ و $\sin x \cong -x$، ماتریس ضرائب عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۸۲-۱}$$

در این حالت مقادیر ویژه $\lambda_{1,2} = \pm\omega_n$ است. در این حالت هر دو مقدار ویژه حقیقی بوده، یکی از آنها مثبت و دیگری منفیست. در این صورت نقطه تعادل، یک نقطه زینی بوده و ناپایدار است.

منحنی‌های مسیر در شکل ۱-۱۵ برای سه سطح مختلف انرژی رسم شده‌اند. برای $E = \omega_n^2$، منحنی مسیر بسته است. این مسدله به معنی یک حرکت متناوب است. برای مقادیر کوچک $E < \omega_n^2$ حرکت هارمونیک خواهد بود. به ازای مقادیر کمی بزرگتر انرژی، یعنی $\omega_n^2 < E < 2\omega_n^2$، حرکت هارمونیک نخواهد بود اما همچنان متناوب باقی می‌ماند. به ازای $E > 2\omega_n^2$، مسیر حرکت باز بوده و حرکت دورانی است. در این حالت پاندول حول نقطه تماس خود دوران کامل می‌کند.



شکل ۱-۱۵، منحنی مسیر حرکت به ازای سه سطح مختلف انرژی